

Vorsemesterkurs Informatik
Sommersemester 2011

Aufgabenblatt Nr. II.1

Aufgabe 1 (Induktion)

a) Zeige $\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$.

b) Die Menge U bestehe aus n Objekten.

Zeige, dass U genau 2^n Teilmengen besitzt, wenn wir die leere Menge als eine Teilmenge von U zulassen.

Aufgabe 2 (fehlerhafte Induktion)

Wir zeigen, dass alle Pferde die gleiche Farbe besitzen und führen einen Beweis durch Induktion über die Zahl k aller Pferde. Im Basisschritt ist $k = 1$ und die Behauptung ist offensichtlich richtig. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass es $k + 1$ Pferde p_1, \dots, p_{k+1} gibt. Dann haben aber nach Induktionsvoraussetzung p_1, \dots, p_k die Farbe von p_2 und p_2, \dots, p_{k+1} ebenfalls die Farbe von p_2 und somit haben alle $k + 1$ Pferde p_1, \dots, p_{k+1} die gleiche Farbe und wir haben die Behauptung gezeigt.

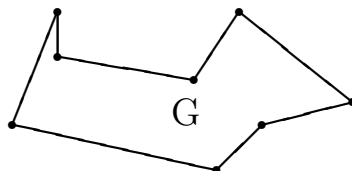
Was haben wir falsch gemacht?

Die folgenden Aufgaben können zu Hause bearbeitet werden. Sie werden zu Anfang der nächsten Vorlesung besprochen.

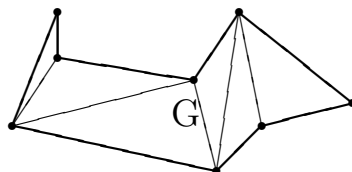
Aufgabe 3 (Induktive Argumentation)

a) Zeige: Teilt man ein Rechteck durch Geraden in Teilflächen, so kann man die Teilflächen immer so mit den Farben Schwarz und Weiß färben, dass Teilflächen, die an einer Kante zusammenstoßen, verschiedene Farben besitzen.

- b) Ein einfaches Polygon ist ein von einem geschlossenen, sich nicht schneidenden, Streckenzug begrenztes, ebenes geometrisches Objekt. Hier ein Beispiel für ein einfaches Polygon G mit $n = 8$ Ecken.



Wir möchten ein einfaches Polygon triangulieren, das heißt in disjunkte Dreiecke zerlegen. Dazu können nicht überschneidende Diagonalen in das einfache Polygon eingefügt werden, wobei eine Diagonale eine im Polygon verlaufende Strecke ist, die zwei Eckpunkte verbindet. Hier ist ein Beispiel einer möglichen Triangulation des obigen einfachen Polygons:



Zeige, dass sich jedes einfache Polygon G mit n Ecken durch $n - 3$ Diagonalen triangulieren lässt und, dass dabei $n - 2$ Dreiecke entstehen.

Es kann davon ausgegangen werden, dass zu jedem einfachen Polygon mit mehr als 3 Ecken eine Diagonale existiert. Wer mag, kann das aber auch noch beweisen.