GOETHE UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN
Fachbereich Informatik und Mathematik
Institut für Informatik

Vorsemesterkurs Informatik

Sommersemester 2011

Aufgabenblatt Nr. II.2

Aufgabe 1 (Konvergenz)

k sei eine natürliche Zahl.

(a) *Zeige*: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/k}} = 0$.

(b) *Zeige*: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

Aufgabe 2 (Konvergenz)

Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Zeige: $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{b_n}| = \infty$.

Aufgabe 3 (Grenzwertbestimmung)

(a) Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 10}{5n^2 - 3n + 4}.$$

(b) $p(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{s} b_i x^i$ seien zwei Polynome mit den reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_r$ und $b_0, \ldots, b_s$. Es gelte $a_r \neq 0$ und $b_s \neq 0$; man sagt, dass p den Grad r und q den Grad s hat.

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}.$$

(In Teil (a) betrachten wir also die Folge $(p(n)/q(n))$ mit $p(x) = x^3 - 10$ und $q(x) = 5x^2 - 3x + 4$.)

Die folgenden Aufgaben können zu Hause bearbeitet werden. Sie wird zu Anfang der nächsten Vorlesung besprochen.

Aufgabe 4 (Division ohne zu dividieren)

Sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Wir wollen $1/a$ berechnen, ohne Divisionen zu benutzen. Wir suchen also eine Lösung x für die Gleichung $ax = 1$. Diese Gleichung lässt sich äquivalent als $x = 2x - ax^2$ umschreiben; das gesuchte x ist dann die von Null verschiedene Lösung dieser Gleichung. Wir definieren die Folge (x_n) durch $x_0 \geq 1/a$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ für $f(x) := 2x - ax^2$. Zeige, dass die Folge (x_n) gegen $1/a$ strebt.

(a) Zeige zunächst, dass $x_{n+1} > 1/a$. *Tipp*: verwende Induktion

(b) Zeige dann, dass die Folge monoton fallend ist.

(c) Argumentiere nun mit (a) und (b) und zeige, dass $lim_{n\to\infty}(x_n) = 1/a$

Aufgabe 5 (Grenzwertbestimmung)

Zeige: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Hinweis: $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$.