Skript zum Vorkurs Informatik
Mathematik

Dr. Hartwig Bosse

20. März 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen **5**
- 1.1 Gruppen: Abstraktes Rechnen mit einem Operator . . . 5
  - 1.1.1 Axiomatische Definition einer Gruppe . . . 5
  - 1.1.2 Rechenregeln in Gruppen . . . 7
  - 1.1.3 Isomorphe Gruppen . . . 9
- 1.2 Die Struktur der Verknüfungstabelle . . . 9
- 1.3 Die Gruppenordnung . . . 10

2 Vektoren **13**
- 2.1 Was sind Vektoren und wo tauchen sie auf? . . . 13
  - 2.1.1 Vektoren in Kartesischen Koordinaten . . . 13
- 2.2 Rechnen mit Vektoren . . . 14
- 2.3 Aufgaben . . . 18
  - 2.3.1 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ . . . 18

3 Matrizen **19**
- 3.1 Matrizen . . . 19
- 3.2 Rechnen mit Matrizen . . . 20
- 3.3 Matrix-Matrix-Multiplikation . . . 22
- 3.4 Aufgaben . . . 25
  - 3.4.1 Elementare Rechnungen . . . 25

A Lösungen zu den Übungsaufgaben **27**
- A.1 Lösungen: Vektoren . . . 27
- A.2 Lösungen: Matrizen . . . 28

Kapitel 1

Gruppen

1.1 Gruppen: Abstraktes Rechnen mit einem Operator

Eine Gruppe ist die mathematische Abstraktion von Rechnen mit einer einzelnen *umkehrbaren* Operation z.B. "Rechnen mit Plus in $\mathbb{Z}$" oder "Rechnen mit Multiplikation in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$".

Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist ein Paar aus einer Menge G zusammen mit einer einzelnen Operation $\circ$, mittels der auf der Menge gerechnet werden kann. Ein typisches Beispiel ist die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ der Ganzen Zahlen zusammen mit der Addition.

Die Notation $(G, \circ)$ in der eine Menge zusammen mit einer Operation ein Paar bildet, wirkt beim ersten Mal ungewohnt.

1.1.1 Axiomatische Definition einer Gruppe

Das Einfüren einer Gruppe mitels der Gruppen-Axiome liefert eine sehr knappe Formulierung für eine Menge in der man lineare Gleichungen lösen kann:

Definition 1 (Gruppe)

Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist ein Tupel aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$, so dass gelten:

Abgeschlossenheit	G1)	$a \circ b \in G$	$\forall a, b \in G$	
Assoziativität	G2)	$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$		$\forall a, b, c \in G$
Neutrales Element	G3)	$\exists e \in G :$	$(e \circ a = a \circ e = a$	$\forall a \in G)$
Inverses Element	G4)	$\forall a \in G :$	$\exists \overline{a} \in G :$	$\overline{a} \circ a = e$

Analyse: Das Neutrale Element e ist dasjenige Element $e \in G$, das jedes Element $a \in G$ unverändert lässt, wenn mann e mit a verknüpft. In einer Gruppe mit einer additiven Verknüpfung übernimmt e die Rolle der Null, in einer Gruppe mit einer multiplikativen Verknüpfung übernimmt e die Rolle der 1.

Beispiel 2

$(\mathbb{Z}, +)$ Die Menge $\mathbb{Z}$ zusammen mit der gewöhnlichen Addition bildet eine Gruppe:

G1) Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt $m + n \in \mathbb{Z}$.

G2) Für alle $m, n, k \in \mathbb{Z}$ gilt $m + (n + k) = (m + n) + k$.

G3) Das Neutrale Element ist hier die Zahl $e = 0$, sie erfüllt: $0+ = x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

G4) Das Inverse zu einer Zahl $m \in \mathbb{Z}$ ist die zugehörige Zahl $-m$ mit entgegengesetztem Vorzeichen: Die zu 3 inverse Zahl ist -3, es gilt $(-3) + 3 = 0 = e$.

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ Die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ bildet zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation eine Gruppe:

G1) Für alle $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt $x \cdot y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

G3) Das Neutrale Element ist hier die Zahl $e = 1$, sie erfüllt: $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

G4) Das Inverse zu einer Zahl $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist die zugehörige Zahl $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: Die zu 3 Inverse Zahl ist $\frac{1}{3}$, es gilt $3 \cdot \frac{1}{3} = 1 = e$.

$(\{1, 2, 3, 4\}, \odot_5)$ Die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ bildet mit der Verküpfung $a \odot_5 b := \mathsf{Rest}_5(a \cdot b)$ eine Gruppe:

G1) Für alle $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $a \odot_5 b \in \{1, 2, 3, 4\}$ (siehe Verknüpfungstabelle)

G3) Das Neutrale Element ist hier die Zahl $e = 1$, sie erfüllt: $1 \odot_5 b = b$ für alle $b \in \{1, 2, 3, 4\}$.

G4) Das Inverse zu den Zahlen $b \in \{1, 2, 3, 4\}$ liest man aus der Verknüpfungstabelle ab:

$b =$	1	2	3	4
Inverses $\bar{b} =$	1	3	2	4

Verknüpfungstabelle

$a \odot_5 b$	$b =$ 1	2	3	4
$a =$ 1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

G3) Auslesen:
Neutrales Element

	$a \odot_5 b$	$b =$ 1	2	3	4	
$\boxed{e=1}$	1	1	2	3	4	$\boxed{a \circ b = b}$
	2	2	4	1	3	
	3	3	1	4	2	
	4	4	3	2	1	

G4) Auslesen:
Inverse Elemente

	$a \odot_5 b$	$b =$ 1	2	3	4
Inverses zu 1	1	1	•	•	•
Inverses zu 3	2	•	•	1	•
Inverses zu 2	3	•	1	•	•
Inverses zu 4	4	•	•	•	1

1.1.2 Rechenregeln in Gruppen

In jeder Gruppe gelten die folgenden Regeln:

Lemma 3

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

1. a) Es gibt in $(G, \circ)$ genau ein neutrales Element e.
   b) Es gilt $e \circ a = a \circ e$ für alle $a \in G$.
2. a) Für jedes $a \in G$ gibt es genau ein inverses $\overline{a}$.
   b) Es gilt $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a$
3. Das inverse zu $\overline{a}$ ist a, d.h. es gilt $\overline{(\overline{a})} = a$.

Beweis: Exemplarisch führen wir hier die Beweise für 1 a) und 1 b).

- **Zu 1 b)** Es sei $a \in G$ beliebig.
  Nach Axiom G2 hat a ein Inverses $\overline{a}$ mit $\overline{a} \circ a = e$. Es gilt dann:
  $$a \circ e \stackrel{G3}{=} a \circ (\overline{a} \circ a) \stackrel{G2}{=} \underbrace{(a \circ \overline{a})}_{=e} \circ a \stackrel{2b)}{=} e \circ a$$
- **Zu 1 a)** Es seien $e, \widetilde{e} \in G$ zwei neutrale Elemente, d.h. sie erfüllen $e \circ a = a$ und $\boxed{\widetilde{e} \circ a = a}^{\star}$ für alle $a \in G$. Dann gilt $\widetilde{e} \circ e = e$ (Aussage $\star$ für $a = e$), sowie $\widetilde{e} \circ e \stackrel{1b)}{=} e \circ \widetilde{e} \stackrel{G4}{=} \widetilde{e}$. Insgesamt gilt also $\widetilde{e} = e$.

$\square$

Lösen von Gleichungen

Die Gruppe ist die kleinste Recheneinheit der Mathematik, in der lineare Gleichungen stets lösbar sind: Um Eine Gleichung der Form $a \circ x = b$ lösen zu können, muss sicher sein, dass man den Vorgang "*a mit x mittels $\circ$ verknüpfen*" rückgängig machen kann. Dazu dient das Inverse:

Rechnet man in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit der Verknüpfung $\cdot$ so kann man die Gleichung $2 \cdot x = 7$ durch Multiplikation mit $1/2$ bzw. $0,5 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wie folgt lösen:

$$\begin{array}{rrrrcl} & & 2\cdot & x & = & 7 \\ \Leftrightarrow & (0,5)\cdot & 2\cdot & x & = & 0,5 \cdot 7 \\ \Leftrightarrow & & & x & = & 3,5 \end{array}$$

Die Zahl $0,5 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist das "multiplikative Inverse zu 2". Die Zahl $0,5$ kann also das ungeschehen machen, was die Multiplikation mit 2 "angerichtet hat", denn es gilt: $0,5 \cdot 2 = 1$ und die Zahl 1 benimmt sich bei der Multiplikation neutral.

Lemma 4 (In Gruppen sind Gleichungen lösbar)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $a, b \in G$.
Die Gleichung der Form $a \circ x = b$ hat stets eine Lösung $x \in G$, nämlich $x = \overline{a} \circ b$.

Beweis: In der Gruppe G gibt es ein zu a inverses Element $\overline{a}$, und Verknüpfung mit $\overline{a}$ "entfernt " a auf der linken Seite der Gleichung. Beachten Sie, dass beim Umformen der Gleichung $A \circ x = b$ *alle* Gruppenaxiome $G1$) bir $G4$) verwendet werden müssen:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & a \circ x & = & b \\
\Leftrightarrow & \overline{a} \circ (a \circ x) & = & \overline{a} \circ b \\
 & & & \quad \text{Assoziativität: G2)} \\
\overset{G2}{\Leftrightarrow} & (\overline{a} \circ a) \circ x & = & \overline{a} \circ b \\
 & & & \quad \text{Eigenschaften des Inversen: G4)} \\
\overset{G4}{\Leftrightarrow} & e \circ x & = & \overline{a} \circ b \\
 & & & \quad \text{Eigenschaften des Neutralen: G3)} \\
\overset{G3}{\Leftrightarrow} & x & = & \overline{a} \circ b
\end{array}
$$

Dass Die Lösung $x = \overline{a} \circ b$ wieder in G ist, liegt an Axiom G1). $\square$

Beispiel 1.1 (Rechnen in der Gruppe $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$)
Eine Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ hat immer eine Lösung $x = \frac{1}{a} \cdot b$.

Hier ist $\frac{1}{a}$ das Multiplikativ-Inverse zu $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, das Inverse $\frac{1}{a}$ zu bilden ist immer möglich, da $a \neq 0$ gilt.

Beispiel 1.2 (Rechnen in der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$)
Eine Gleichung der Form $a + x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ hat immer eine Lösung $x = (-a) + b$.

Hier ist $-a$ das Additiv-Inverse zu $a \in \mathbb{Z}$.

Anti-Beispiel 5 (Rechnen in $(\mathbb{N}, +)$)

Die Menge $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, und deswegen gibt es Gleichungen der Form $a + x = b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, die keine Lösung in $\mathbb{N}$ besitzen:
Ein Beispiel für eine solche Gleichung ist $5 + x = 0$ die "Lösung" $x = -5$ liegt nicht in $\mathbb{N}$, d.h. man verlässt beim Lösen der Gleichung die vorgegbene Menge.

Anti-Beispiel 6 (Rechnen in $(\mathbb{Q}, \cdot)$)

Die Menge $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist keine Gruppe, und deswegen gibt es Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, die keine Lösung in $\mathbb{N}$ besitzen:
Ein Beispiel für eine solche Gleichung ist $0 \cdot x = 5$, diese Gleichung besitzt keine Lösung.

Symmetrische Gruppen (Abelsche Gruppen)

Für die meisten bisher betrachteten Gruppen ist die Verknüpfungsreihenfolge in $a \circ b$ gleichgültig, dies ist aber etwas besonderes für Gruppen:

Definition 7 (Abelsche Gruppen)

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt abelsch, wenn zusätzlich zu den Gruppenaxiomen G1) bis G4) gilt:

Symmetrie: $\quad G_{\mathsf{symm}})\quad a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$

Die Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind Abelsche Gruppen.

Die Menge der (invertierbaren) Matrizen (s. Kapitel "Matrizen") bildet zusammen mit der Matrix-Multiplikation eine **nicht-abelsche** Gruppe, denn es gilt im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$.

1.1.3 Isomorphe Gruppen

Es ist möglich, ein und die selbe Gruppe auf verschiedene Arten und Weisen zu notieren:

Isomorphe Gruppen sind strukturell identisch

Augenscheinlich sind die Gruppen $(\{0,1\}, \oplus_2)$, $(\{1,2\}, \odot_3)$ und $(\{\mathrm{Falsch}, \mathrm{Wahr}\}, \mathring{\vee})$ "strukturell gleich", wenn man die jeweiligen Verknüpfungstabelle anschaut:

Addition modulo 2

$a \oplus_2 b$	$b =$ 0	1
$a =$ 0	0	1
1	1	0

Multiplikation modulo 3

$a \odot_3 b$	$b =$ 1	2
$a =$ 1	1	2
2	2	1

Boolsche Algebra

$a \mathring{\vee} b$	$b =$ F	W
$a =$ F	F	W
W	W	F

Ersetzt man in einer Gleichung $a \oplus_2 b = c$ in $(\{0, 1\}, \oplus_2)$ ...

- jede 0 durch F,
- jede 1 durch W
- und $\oplus_2$ durch $\mathring{\vee}$

so erhält man wieder eine korrekte Gleichung.

1.2 Die Struktur der Verknüfungstabelle

Um Satz 9 zu beweisen benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 8

Es sei $(G, \circ)$ eine endliche abelsche Gruppe und $a \in G$ sei ein fest gewähltes Element.
Dann ist die Abbildung $f_a : G \to G$ mit $f_a(x) := a \circ x$ bijektiv, d.h. es gilt:

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \quad = \quad \{a \circ g_1,\ a \circ g_2,\ \dots,\ a \circ g_n\}$$

Die Verknüpungstabelle einer Gruppe $(G, \circ)$ ist immer ein kleines "Sudoku" (Lemma 8)

Dass die Abbildung $f_a : x \mapsto a \circ x$ bijektiv ist, hat zur Folge, dass in jeder Zeile (und in jeder Spalte) der Verknüpungstabelle jedes Gruppenelement *genau einmal* vorkommt:

Dies veanschaulichen wir am Beispiel der Gruppe $(\{1,2,3,4\}, \odot_5)$. Es gilt für $a := 3$:

Element	g	1	2	3	4	
Bild	$f_3(g) = 3 \odot_5 g$	3	1	4	2	← Jedes g taucht genau einmal auf.

Hier ist die Zeile mit den Werten für "$f_3(g)$" die dritte Zeile der Verknüpfungstabelle von $\odot_5$:

$a \odot_5 b$		$b =$ 1	2	3	4	
$a =$	1	1	2	3	4	
	2	2	4	1	3	
	3	3	1	4	2	← Jedes g taucht genau einmal auf.
	4	4	3	2	1	

└ Jedes g taucht genau einmal auf.

Beweis: (Lemma 8)

- **Surjektivität:** Zu zeigen ist: für jedes $y \in G$ gibt es ein $x \in G$ mit $f_a(x) = y$.

  Sei $y \in G$ beliebig. Wähle $x := \overline{a} \circ y$, dann gilt: $f_a(x) = a \circ (\overline{a} \circ y) \overset{G1}{=} (a \circ \overline{a}) \circ y = y$.

- **Injektivität:** Zu zeigen ist: für jedes Paar $x, \widetilde{x} \in G$ mit $x \neq \widetilde{x}$ gilt: $f_a(x) \neq f_a(\widetilde{x})$.

  Es seien $x, \widetilde{x} \in G$ beliebig mit $x \neq \widetilde{x}$. Annahme es gelte: $f_a(x) = f_a(\widetilde{x})$. Dann gilt:

$$\begin{array}{ccccccccc} f_a(x) & = & f_a(\widetilde{x}) & \Leftrightarrow & a \circ x & = & a \circ \widetilde{x} & & |\overline{a}\circ \\ & & & \Rightarrow & \overline{a} \circ (a \circ x) & = & \overline{a} \circ (a \circ \widetilde{x}) & & \\ & & & \Leftrightarrow & (\overline{a} \circ a) \circ x & = & (\overline{a} \circ a) \circ \widetilde{x} & \Leftrightarrow & x = \widetilde{x} \end{array}$$

  Die letzte Gleichung ist ein Widerspruch zu $x \neq \widetilde{x}$.

□

1.3 Die Gruppenordnung

Im Folgenden werden wir zeigen, was beim mehrfachen Verknüpfen ein und desselben Gruppenelements passiert. Interessanterweise kommt man in einer abelschen Gruppe immer wieder am neutralen Element "vorbei". Um dies zu zeigen benötigen wir die Eigenschaften einer funktion $f_a : G \to G$, die ein Element $x \in G$ einfach mit einem (festen!) Element a verknüpft: $f_a(x) = a \circ x$.

Für eine Gruppe $(G, \circ)$ kann man die Mehrfach-Verknüfung eines Elementes mit a^n abkürzen:

Die Potenz a^n **steht für "Mehrfachverknüpfen" (analog zur Potenz von Zahlen):**

Für ein Element $a \in G$ einer Gruppe $(G, \circ)$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist definiert:

$$a^n = \underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{n-\text{oft}} \circ e$$

Es gilt also $\quad a^0 = e \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^2 = a \circ a \quad$ etc.

Die Gruppenordnung ist die Anzahl der Elemente in G**:**

Für eine Gruppe $(G, \circ)$ bezeichnet $|G|$ die Anzahl der Elemente in G, $|G|$ heißt die *Ordnung* von G.
Hat G *endlich* viele Elemente, so nennt man $(G, \circ)$ eine *endliche* Gruppe.
Hat G *unendlich* viele Elemente, so sagt man: Die Gruppenordnung von $(G, \circ)$ ist ∞.

Satz 9 (Zahlentheoretischer Satz von Euler)

Es sei $(G, \circ)$ eine endliche abelsche Gruppe mit neutralem Element e.
Für alle $a \in G$ gilt dann: $a^{|G|} = e \qquad$ ($|G|$ = Anzahl der Elemente von G).

Beispiel 10 (Zum Satz 9)

Wir untersuchen die Aussage $a^{|G|} = e$ am Beispiel der Gruppe $(\mathbb{Z}_5^*, \odot_5)$.

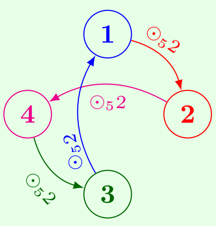
Hier gelten $\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$ und für zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Z}_5^*$ ist $a \odot_5 b := \mathsf{Rest}_5(a \cdot b)$, d.h $a \odot_5 b$ ist der Rest der beim Teilen von $a \cdot b$ durch 5 entsteht.

Das Paar $(\mathbb{Z}_5^*, \odot_5)$ bildet eine Gruppe (s. Beispiel auf Seite 6).

Das neutrale Element ist $e = 1$. Weiter gilt $|G| = 4$ wegen $\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$. Wir untersuchen also nun a^4 für $a \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{array}{lllllll}
1^4 & = & \mathsf{Rest}_5(1^4) & = & \mathsf{Rest}_5(1) & = & 1 \\
2^4 & = & \mathsf{Rest}_5(2^4) & = & \mathsf{Rest}_5(16) & = & 1 \\
3^4 & = & \mathsf{Rest}_5(3^4) & = & \mathsf{Rest}_5(81) & = & 1 \\
4^4 & = & \mathsf{Rest}_5(4^4) & = & \mathsf{Rest}_5(256) & = & 1
\end{array}$$

Berechnet man alle Werte von 2^k in $\mathbb{Z}_5^*$ durch sukzessive Multiplikation "$\odot_5 2$", so erhält man nach und nach alle Elemente aus $\mathbb{Z}_5^*$: Man startet bei $1 = 2^0$ und nach einem Zyklus von $4 = |\mathbb{Z}_5^*|$-oft "mal-zwei-nehmen" erreicht man zwangsläufig wieder die 1:



$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & = \mathsf{Rest}(2 \cdot 1, 5) & & = \mathsf{Rest}(2 \cdot 2, 5) & & = \mathsf{Rest}(2 \cdot 4, 5) & & = \mathsf{Rest}(2 \cdot 3, 5) & & & & & & \\
1 & \xrightarrow{\odot_5 2} & 2 & \xrightarrow{\odot_5 2} & 4 & \xrightarrow{\odot_5 2} & 3 & \xrightarrow{\odot_5 2} & 1 & \xrightarrow{\odot_5 2} & 2 & \xrightarrow{\odot_5 2} & 4 & & \ldots \\
2^0 & & 2^1 & & 2^2 & & 2^3 & & 2^4 & & 2^5 & & 2^6 & & \ldots
\end{array}$$

Beweis: (Satz 9)

Es sei $(G, \circ)$ eine endliche abelsche Gruppe mit $n := |G|$ Elementen $g_1, \ldots, g_n \in G$. Weiter sei $a \in G$ beliebig (d.h. es gilt $a = g_i$ für ein i).
Da $f_a : G \to G$ mit $f_a(x) = a \circ x$ nach Lemma 8 eine bijektive Abbildung ist, gilt:

$$G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} = \{a \circ g_1,\, a \circ g_2,\, \ldots,\, a \circ g_n\}$$

Die Gruppe $(G, \circ)$ ist abelsch. Bildet man also die Verknüpfung aller Elemente in G, so spielt die Reihenfolge keine Rolle. Es gilt also

$$\overbrace{g_1 \circ \cdots \circ g_n}^{\text{Verknüpfung aller } g_j \text{ sortiert}} = \overbrace{(a \circ g_1) \circ (a \circ g_2) \circ \cdots \circ (a \circ g_n)}^{\text{Verknüpfung aller } g_j \text{ ``durcheinander''}}$$

Da $(G, \circ)$ abelsch ist, dürfen wir **umsortieren**, es gilt zum Beispiel $a \circ g_1 \circ a \circ g_2 = g_1 \circ a \circ a \circ g_2$.
Wiederholt man dies immer wieder, so erhält man aus der letzen Gleichung schließlich:

$$g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n \circ \underbrace{a \circ a \circ \cdots \circ a}_{n \text{ Stück}}$$

Nun "kürzt" man durch Multiplizieren auf beiden Gleichungsseiten mit den Inversen $\overline{g_1}$, $\overline{g_2}$, ...

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n &= g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n \circ a^n && \overline{g_1}\circ \\ g_2 \circ \cdots \circ g_n &= g_2 \circ \cdots \circ g_n \circ a^n && \overline{g_2}\circ \\ &\vdots \\ g_n &= g_n \circ a^n && \overline{g_n}\circ \\ e &= a^n \end{aligned}$$

Dieses Kürzen mit $g_1 \circ \cdots \circ g_n$ liefert: $e = a^n$ bzw. $a^{|G|} = e$. □

Kapitel 2

Vektoren

2.1 Was sind Vektoren und wo tauchen sie auf?

Ein Vektor in der Schulmathematik ist -etwas unpräzise gesagt- zunächst einmal eine Spalte mit Zahleneinträgen. Allerdings haben Vektoren eine geometrische Bedeutung, diese lässt sich auf zwei verschiedene Weisen verstehen:

Zum einen kann man einen Vektor als einen Punkt im Raum auffassen. Beispielsweise ist der uns umgebende Raum in dem wir leben dreidimensional: Wählt man einen festen Bezugspunkt, so lässt sich jeder Punkt in unserem Universum durch einen Vektor mit drei Einträgen (Höhe, Breite, Länge) relativ zu diesem Punkt beschreiben. Solche Vektoren nennt man in der Literatur oft "Ortsvektoren".

Andererseits repräsentieren Vektoren in der Physik Kräfte, also eine Messgröße die mit einer Richtung einhergeht: Im Gegensatz zu "Zahlen-Messgrößen" wie Temperatur oder Masse, muss man um eine Kraft vollständig zu beschreiben nicht nur angeben wie groß die Kraft ist, sondern auch in welche Richtung sie wirkt. Solche Verschiebe-Vektoren haben Ihren Startpunkt nicht immer in der Null.

Vektoren haben also geometrische Eigenschaften und gleichzeitig sind Vektoren im Wesentlichen nur eine Spalte mit Zahleneinträgen. Um also mit Vektoren zu arbeiten, muss man lernen wie man geometrische Aussagen ("Zwei Geraden Schneiden sich") in mathematischen Gleichungen ausdrückt. Ein wesentlicher Lerninhalt dieses Kapitels ist also das Übersetzen von Geometrie in Algebra[1].

2.1.1 Vektoren in Kartesischen Koordinaten

In diesem Skipt verwenden wir eine etwas sehr vereinfachte Definition eines Vektors:

Für eine natürliche Zahl n ist $\mathbb{R}^n$ der Vektorraum aller Vektoren der Länge n: Ein Vektor $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^n$ ist eine Spalte mit n Zahleneinträgen. Die Einträge eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ sind also reele Zahlen, die man mit $a_1, a_2, \dots a_n$ bezeichnet.

Die allgemeine Form eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ lautet:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$$

[1] Algebra ist der Bereich der Mathematik, der sich mit Gleichungen beschäftigt.

Zum Beispiel ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Element aus $\mathbb{R}^2$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Element aus $\mathbb{R}^3$.

Vektoren kann man geometrisch auf zwei weisen auffassen:

- Als Punkte im Raum, sogenannte *Ortsvektoren* oder
- als “Verschiebe-Vektoren”[2], gegeben durch eine Verschiebe-Richtung und eine Verschiebe-Länge.

Beispielsweise beschreibt der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ einen Punkt, der im $\mathbb{R}^2$ bei $x = 2$ und $y = 4$ liegt. Verschiebt man nun diesen Punkt $\vec{a}$ um beispielsweise 7 Einheiten in x-Richtung und um 2 Einheiten in y-Richtung, so kann man dies auffassen als eine Anwendung des Verschiebe-Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ (s. Abbildung 2.1).

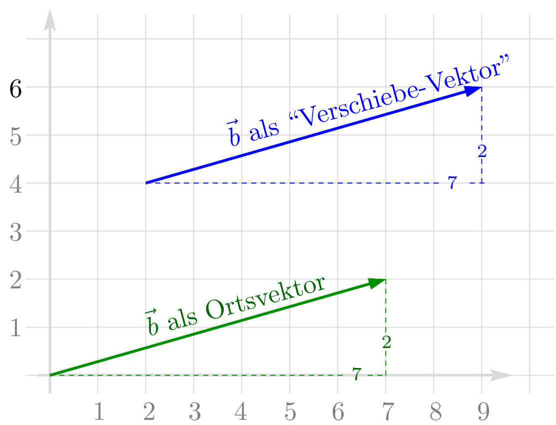


Abbildung 2.1: Anschauliche Darstellung eines Vektors.

2.2 Rechnen mit Vektoren

Addition

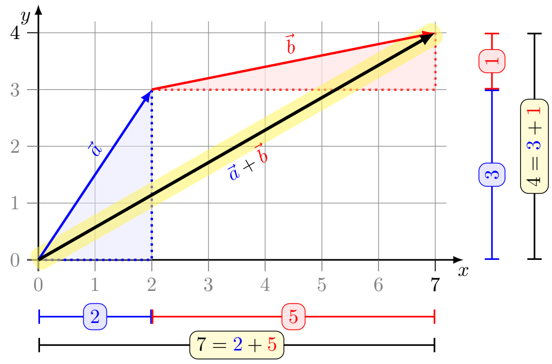
Man kann Vektoren mit *gleich vielen* Einträgen addieren oder von einander abziehen (Dies geht mit Vektoren mit veschieden vielen Einträgen nicht!).

Die **Addition und Subtraktion** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^n$ berechnet man elementweise wie folgt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

Die *Addition* zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entspricht geometrisch dem Aneinanderhängen der Pfeile:

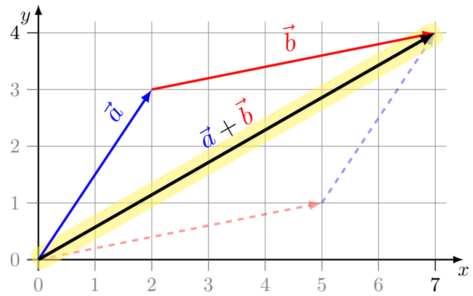
[2] Das Wort Verschiebe-Vektor ist *kein* mathematischer Fachbegriff und dient in diesem Kapitel *nur* der Veranschaulichung



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

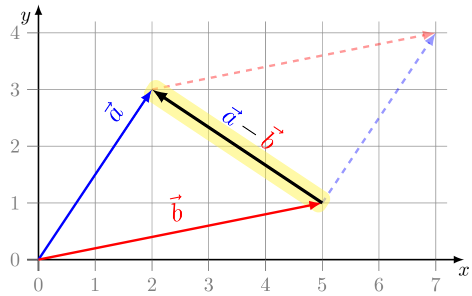
Die **Subtraktion** zweier Vektoren, $\vec{a} - \vec{b}$, wird einfach als Addition von $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ aufgefasst. Geometrisch kann man dies verstehen als dass man den Vektor $\vec{b}$ mit umgekehrter Richtung an den Vektor $\vec{a}$ hängt. Eine deutlich bessere Ansachauung erhält man jedoch, wenn man das Resultat der Subtraktion $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ liest als: "$\vec{a} - \vec{b}$ ist derjenige Vektor, der von $\vec{b}$ zu $\vec{a}$ führt" denn es gilt: $\boxed{\vec{a} - \vec{b}} + \vec{b} = \vec{a}$

Addition



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Subtraktion



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einer Zahl

Die **Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl** erfolgt durch elementweise Multiplikation:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} \qquad \text{für eine Zahl } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aus dieser Rechenregel ersieht man, dass zum Beispiel $2 \cdot \vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$ gelten muss:

$$2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \cdot a_1 \\ \vdots \\ 2 \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_1 \\ \vdots \\ a_n + a_n \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{a}.$$

Geometrisch entspricht die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl λ also einer Streckung bzw. einer Stauchung von $\vec{a}$ um den Faktor λ:

- für $0 < |\lambda| < 1$ ist $\lambda \cdot \vec{a}$ *kürzer* als $\vec{a}$.
- für $1 < |\lambda|$ ist $\lambda \cdot \vec{a}$ *länger* als $\vec{a}$.

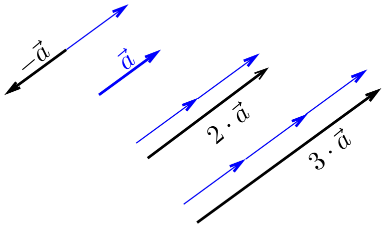


Abbildung 2.2: Streckung eines Vektors.

Ist λ negativ, so kehrt sich die Richtung eines Vektors $\vec{a}$ beim Multiplizieren mit λ um, der Vektor $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$ zeigt also genau entgegengesetzt zu $\vec{a}$ (s. Abbildung 2.2).

Für die Addition von Vektoren und die Multiplikation mit einer Zahl gelten die selben Rechenregeln, die man schon von "normalen Zahlen" kennt:

Rechenregeln für Vektoren

- **Kommutativgesetz:** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- **Assoziativgesetz:** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

$\Big\}$ Reihenfolge ist bei Addition beliebig

- **Distributivgesetze:** $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

  $\lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

$\Big\}$ Punkt- vor Strichrechnung

Skalarprodukt

Bisher haben wir nur die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl definiert. Das Ergebnis war ein gestreckter bzw. gestauchter Vektor. Es ist aber auch möglich Vektoren mit Vektoren zu multiplizieren, das Ergebnis ist hier allerdings eine Zahl.

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n \ .$$

Beispiel

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 24 \ .$$

Das Skalarprodukt wird in der Schule manchmal auch mit " $\vec{a} \bullet \vec{b}$" bezeichnet.

Das **Ergebnis eines Skalarproduktes ist stets eine Zahl** (und kein Vektor).
Es gibt außer dem Kreuzprodukt keine Vektormultiplikation bei der ein Vektor herauskommt!

Es gelten die folgenden **Rechenregeln für das Skalarprodukt**:

Symmetrie $\langle\vec{a},\vec{c}\rangle = \langle\vec{c},\vec{a}\rangle$

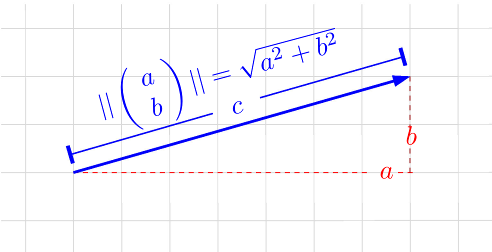
Linearität $\langle\vec{a},\vec{c}+\vec{d}\rangle = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{a},\vec{d}\rangle$ und $\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{b},\vec{c}\rangle$

$\langle\lambda\,\vec{a},\vec{v}\rangle = \lambda\,\langle\vec{a},\vec{v}\rangle$ und $\langle\vec{a},\lambda\,\vec{v}\rangle = \lambda\langle\vec{a},\vec{v}\rangle$

Wobei $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d} \in \mathbb{R}^n$ Vektoren der selben Dimension sind und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Zahl.

Länge

Die Länge eines Vektors $\vec{v}$ bezeichnet man mit $||\vec{v}||$, genannt "Betrag von $\vec{v}$". Man verwendet also bei Vektoren *doppelte* Betragsstriche – im Gegensatz zum bereits bekannte Betrag für Zahlen (z.B. $|-3| = 3$). Die Länge eines Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ kann man mit dem Satz des Phytagoras leicht berechnen:



$$||\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}|| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Man beachte, dass der Term unter der Wurzel in dieser Formel den Wert $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle$ hat.

Der **Betrag** eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ist seine geometrische Länge:

$$\text{Länge von } \vec{a} = ||\vec{a}|| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}\ .$$

Geometrische Anschauung des Skalarproduktes

Für zwei Vektoren $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ sei α der Winkel zwischen diesen Vektoren. Es gilt damit sofort: $0 \leq \alpha \leq \pi$ (in Grad gemessen bedeutet dies: Der Winkel ist zwischen 0° und 180°). Für das Skalarprodukt gilt dann:

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha)$$

Aus dieser Formel ergeben sich zwei wichtige Eigenschaften: Zum einen, kann man durch Umstellen der Gleichung den Winkel α wie folgt berechnen:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}\right)\ .$$

Zum anderen sieht man: Stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander, so ist $\alpha = \pi/2$ und $\cos(\alpha) = 0$ und damit gilt:

$$\text{Ist } \vec{a} \text{ senkrecht zu } \vec{b}, \text{ so ist } \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = 0. \tag{2.1}$$

Geometrie

Der Wert von "$||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha)$" ist geometrisch gesehen die "Länge des Senkrechten Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$" (s. Abbildung 2.3). Das Skalarprodukt $< \vec{a}, \vec{b} >$ bestimmt also grob gesagt das Folgende: "Wieviel von $\vec{b}$ zeigt in Richtung von $\vec{a}$?".

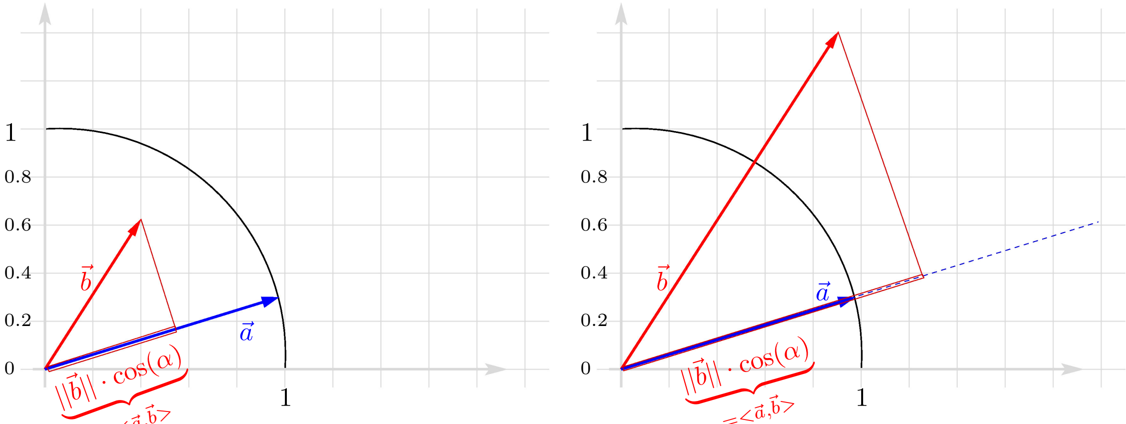


Abbildung 2.3: Geometrische Anschauung des Skalarproduktes.

2.3 Aufgaben

Aufgabe 2.1 Gegeben seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

a) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$ b) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ c) $\langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle$

Aufgabe 2.2 Machen Sie durch eine Rechnung und durch eine Zeichnung klar, dass der Vektor $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ immer senkrecht auf $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ steht.

2.3.1 Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 2.3 Bestimmen Sie die Komponente a_2 so, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

senkrecht aufeinander stehen. Wie groß ist der Abstand $||\vec{b} - \vec{a}||$ zwischen ihnen?

Aufgabe 2.4 Berechnen Sie das Kreuzprodukt von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Testen Sie, ob $\vec{a} \times \vec{b}$ wirklich senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$ steht indem sie $\langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{a} \rangle$ und $\langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{b} \rangle$ berechnen.

Lösungen: siehe Seite 27.

Kapitel 3

Matrizen

3.1 Matrizen

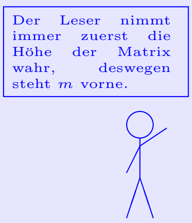
Im vorherigen Abschnitt haben wir uns mit den Vektoren im $\mathbb{R}^n$ beschäftigt. Im folgenden werden wir uns mit Matrizen aus dem Raum $\mathbb{R}^{m\times n}$ beschäftiegn, die lineare Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^n$ beschreiben.

Matrizen (Einzahl: *Matrix*) sind ein Schlüsselkonzept der linearen Algebra und tauchen in fast allen Gebieten der Mathematik auf. Sie stellen Zusammenhänge, in denen Linearkombinationen eine Rolle spielen, übersichtlich dar und werden insbesondere benutzt, um lineare Abbildungen darzustellen.

Eine *Matrix* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist grob gesagt eine Tabelle von m mal n Zahlen, die in einem rechteckigen Schema von m Zeilen und n Spalten angeordnet sind. In $A \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ steht die erste Dimensions-Variable „m“ für die **Höhe** der Matrix. Dies kann man sich merken, indem man sich vorstellt, dass ein (virtueller) Leser, der von links nach rechts „angelaufen kommt“ immer zuerst die Höhe der Matrix wahrnimmt.

Definition 11 (Allgemeine Form einer Matrix)

Eine $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ ist ein Zahlenschema mit $\mathbf{m}$ Zeilen und $\mathbf{n}$ Spalten. Dabei ist $A_{ij} \in \mathbb{R}$ jeweils der Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte:



$$\text{Höhe } \mathbf{m} \quad A = \overbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,\mathbf{n}} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,\mathbf{n}} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots & A_{3,\mathbf{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathbf{m},1} & A_{\mathbf{m},2} & A_{\mathbf{m},3} & \cdots & A_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \end{pmatrix}}^{\text{Breite } \mathbf{n}}$$

Die Einträge $A_{ij} \in \mathbb{R}$ einer Matrix können beliebige Zahlen aus $\mathbb{R}$ sein, es ist aber unzulässig eine Position leer zu lassen.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennt man $m \times n$-Matrix (sprich „m-Kreuz-n-Matrix“).

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} \\ 5 & \mathbf{3} \\ 7 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ ist eine 3×2-Matrix (d.h. $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$) und es gilt $\begin{matrix} A_{1,1} = 1 & A_{1,\mathbf{2}} = \mathbf{2} \\ A_{2,1} = 5 & A_{2,\mathbf{2}} = \mathbf{3} \\ A_{3,1} = 7 & A_{3,\mathbf{2}} = \mathbf{4} \end{matrix}$

Matrizen sind sehr nützliche Hilfsmittel in einer Vielzahl von Anwendungen. Sie eignen sich als Kurzschreibweise für größere Mengen von Daten. Die wahrscheinlich wichtigste solcher Anwendungen sind lineare Gleichungssyteme.

Matrizen bewahren die Koeffizienten für lineare Gleichungssyteme auf:

Betrachten wir die folgenden beiden linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +6x_2 & -8x_3 & = & 0 \\ & -2x_2 & -8x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die wichtige Information dieses Systems steckt lediglich in den Koeffizienten der beiden Gleichungen. Wir können diese in einer Matrix A zusammenfassen, indem wir im Eintrag A_{ij} den Koeffizienten von x_j in der i-ten Gleichung schreiben. Taucht x_j in der i-ten Gleichung nicht auf, so setzten wir $A_{ij} = 0$. Hier lautet die Matrix A also

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} .$$

Mit den Rechenregeln, die wir in Kürze lernen werden, können wir das Gleichungssystem dann folgendermaßen schreiben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

3.2 Rechnen mit Matrizen

Die **Transposition** macht aus den Spalten der Matrix die Zeilen einer neuen Matrix.

Die zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *transponierte* Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist die Matrix, mit den Einträgen $(A^T)_{k\ell} = A_{\ell k}$.

Die *Spalten* der Matrix A (von oben nach unten gelesen) werden zu
Zeilen der Matrix A^T (von links nach rechts gelesen)

Aus $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ wird wie folgt eine Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Liest man einen Vektor als eine $\mathbb{R}^{n\times 1}$-Matrix so kann man diesen auch Transponieren.
Aus einem "stehenden" Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ wird so ein "liegender" Vektor:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad v^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Addition

Matrizen mit gleichen Dimensionen lassen sich addieren. Die Addition funktioniert komponentenweise:

Die **Addition von Matrizen** erfolgt elementweise:

Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Summe $C := A + B$ ist die Matrix mit den Einträgen $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 6+7 \\ 2+3 & 8+9 \\ 4+5 & 10+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 5 & 17 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$$

Matrizen unterschiedlicher Größe lassen sich nicht addieren:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist nicht definiert.}$$

Ganz analog definieren wir natürlich die Subtraktion $A - B$ ganz einfach als die komponentenweise Subtraktion aller Einträge. Die Addition von zwei Matrizen ist nur definiert, wenn sie beide die gleiche Anzahl von Zeilen und auch die gleiche Anzahl von Spalten haben.

Multiplikation mit Skalaren

Die Multiplikation einer Matrix A mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ funktioniert genauso wie bei Vektoren:

Bei der **Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl** wird jeder Eintrag der Matrix multipliziert:

Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $B := \lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Matrix mit den Einträgen $B_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3 \\ 5\cdot 5 & 5\cdot 5 & 5\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix}$$

Bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar muss man sich keine Gedanken um passende Zeilen- und Spaltenanzahl machen. Diese Multiplikation ist immer definiert.

Für die Addition und die Multiplikation mit einer *Zahl* gelten für Matrizen die selben Regeln wie für Vektoren und wie für Zahlen aus $\mathbb{R}$:

Matrizen: Für **Addition und "Multiplikation mit einer Zahl"** gelten die selben Rechenregeln wie für Zahlen:

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ drei $m \times n$-Matrizen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Skalare. Dann gelten:

Kommutativgesetz	$A + B$	$=$	$B + A$
Assoziativgesetz	$(A + B) + C$	$=$	$A + (B + C)$

Assoziativgesetz	$\lambda(\mu A)$	$=$	$(\lambda\mu)A$
Distributivgesetze	$(\lambda + \mu) \cdot A$	$=$	$\lambda A + \mu A$
	$\lambda \cdot (A + B)$	$=$	$\lambda A + \lambda B$

Die Menge $\mathbb{R}^{n\times m}$ lässt sich als ein $n \cdot m$ dimensionaler Vektorraum auffassen.

Multiplikation mit Vektoren

Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor $\vec{v}$ ist so definiert, dass die in A gespeicherten Koeffizienten wieder an die entsprechnden Einträge von $\vec{v}$ multipliziert werden. Das Berechnen von $A \cdot \vec{v}$ erfolgt also zeilenweise, für jede *Zeile* von A wird eine Summe berechnet:

Matrix-Vektor-Multiplikation

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ mit $\mathbf{n}$ Spalten und einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ mit $\mathbf{n}$ Einträgen gilt:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\mathbf{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2\mathbf{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_\mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot v_1 + A_{12} \cdot v_2 + \cdots + A_{1\mathbf{n}} \cdot v_\mathbf{n} \\ A_{21} \cdot v_1 + A_{22} \cdot v_2 + \cdots + A_{2\mathbf{n}} \cdot v_\mathbf{n} \\ \vdots \qquad \vdots \ddots \qquad \vdots \\ A_{m1} \cdot v_1 + A_{m2} \cdot v_2 + \cdots + A_{mn} \cdot v_\mathbf{n} \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis der Multiplikation $A \cdot \vec{v}$ ist also ein Vektor aus $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot \mathbf{1} & +7 \cdot \mathbf{2} & +5 \cdot \mathbf{3} \\ 8 \cdot \mathbf{1} & +6 \cdot \mathbf{2} & +4 \cdot \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Interpretation der Matrixmultiplikation

Die Multiplikation eines Vektors $\vec{v}$ mit einer Matrix A lässt sich auf zwei Weisen verstehen:

a) Skalarprodukt mit den Zeilen von A:

Es wird *zeilenweise* das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit $\vec{v}$ berechnet.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x & +b \cdot y & +c \cdot z \\ 1 \cdot x & +2 \cdot y & +3 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix}$$

b) Linearkombination der Spalten von A:

Es werden Vielfache der *Spalten* von A addiert – mit Vorfaktoren aus $\vec{v}$. Der Vektor $\vec{v}$ ist also eine *Linearkombinations-Anweisung* für die Spalten von A.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x & +b \cdot y & +c \cdot z \\ 1 \cdot x & +2 \cdot y & +3 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} c \\ 3 \end{pmatrix} \cdot z$$

3.3 Matrix-Matrix-Multiplikation

Üblicherweise wird die Multiplikation $A \cdot B$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ „von rechts nach links“ durchgeführt. D.h. die Matrix A wird als Liste von Spalten aufgefasst, die jeweils mit B multipliziert werden:

Die **Matrix-Matrix-Multiplikation** $A \cdot B$ erfolgt durch Zerlegen von B in seine Spalten:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{k \times \mathbf{m}}$ mit "Inputdimension" $\mathbf{m}$
und $B \in \mathbb{R}^{\mathbf{m} \times n}$ mit n Spalten $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$:

$$A = \left(\overbrace{\boxed{\begin{matrix} A_{11} \ldots A_{1\mathbf{m}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ A_{k1} \ldots A_{k\mathbf{m}} \end{matrix}}}^{\text{Breite } m} \right) \qquad \text{Höhe m} \quad B = \left(\boxed{\vec{b}_1} \; \boxed{\vec{b}_2} \; \ldots \; \boxed{\vec{b}_n} \right)$$

Die Matrix $A \cdot B$ hat n-viele Spalten der Form $\boxed{A} \cdot \boxed{\vec{b}_j} \in \mathbb{R}^k$.

$$A \cdot B = \left(\boxed{A} \cdot \boxed{\vec{b}_1} \;,\; \boxed{A} \cdot \boxed{\vec{b}_2} \;,\; \cdots \;,\; \boxed{A} \cdot \boxed{\vec{b}_n} \right)$$

Das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen A und B kann nur dann gebildet werden, wenn die **Spaltenanzahl von** A gleich der **Zeilenanzahl von** B ist.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A \cdot B = \left(A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hat 3 Spalten und B hat 3 Zeilen. Da diese Zahlen gleich sind, können wir das Produkt $A \cdot B$ berechnen.

$$\text{N.R.:} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 9 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A \cdot B$ "erbt" von A die "Output-Dimension" und von B die "Input-Dimension".
Die Zwischen-Dimension $\mathbf{m}$ geht bei der Matrixmultiplikation verloren:

Ist	$A \in \mathbb{R}^{k \times \mathbf{m}}$	mit "Output-Dimension" k	und "Input-Dimension" $\mathbf{m}$
und	$B \in \mathbb{R}^{\mathbf{m} \times n}$	mit "Output-Dimension" $\mathbf{m}$	und "Input-Dimension" n
So ist	$A \cdot B \in \mathbb{R}^{k \times n}$	mit "Output-Dimension" k	und "Input-Dimension" n

Satz 12

Es seien $A \in \mathbb{R}^{k \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B) \cdot x$

Beweis:
Es sei $A \in \mathbb{R}^{k\times \mathbf{m}}$ mit "Inputdimension" $\mathbf{m}$
und $B \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times n}$ mit n Spalten $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$. Weiter sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt $B \cdot \vec{x} = x_1 \cdot \vec{b}_1 + \ldots + x_n \cdot \vec{b}_n \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

$$\begin{aligned} A\cdot(B\cdot\vec{x}) &= A\cdot\left(x_1\cdot\vec{b}_1 + \ldots + x_n\cdot\vec{b}_n\right) \\ &\overset{\star}{=} x_1\cdot A\cdot\vec{b}_1 + \ldots + x_n\cdot A\cdot\vec{b}_1 \qquad (\star \text{ Linearität von } A\cdot y) \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} A\cdot\vec{b}_1 & \ldots & A\cdot\vec{b}_n\end{pmatrix}}_{\text{Matrix mit Spalten } A\cdot\vec{b}_i}\cdot\vec{x} = (A\cdot B)\cdot\vec{x} \end{aligned}$$

$\square$

Die Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen sehen im Pinzip aus, wie Rechnen mit Zahlen aus $\mathbb{R}$. Allerdings gilt für Matrizen das Kommutativgesetz nicht! D.h. im Allgemeinen ist $A\cdot B \neq B \cdot A$. Selbst wenn beide Produkte definiert sind, gilt nicht immer die Gleichheit.

Die **Matrix-Multiplikation** ist **nicht symmetrisch**, ansonsten gelten Regeln wie für "normale Zahlen":

Für Matrizen mit passenden Dimensionen $A, \widetilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, \widetilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ und $C \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ gelten:

1) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ (Assoziativgesetz)

2) $A\cdot(B+\widetilde{B}) = A\cdot B + A\cdot\widetilde{B}$ (Distributivgesetz)
$(A+\widetilde{A})\cdot B = A\cdot B + \widetilde{A}\cdot B$

3) $A\cdot(\lambda\cdot B) = \lambda\cdot A\cdot B$ gilt für alle $\lambda\in\mathbb{R}$

Im Allgemeinen gilt:

$A\cdot B \neq B\cdot A$ (Kommutativgesetz gilt im Allgemeinen nicht)

Beweis: Die Aussagen in 2) und 3) lassen sich direkt aus der Definition der Matrixmultiplikation ableiten.
Zu 1) Es sei $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_\ell)$ mit Spalten $c_i \in \mathbb{R}^k$.

$$\begin{aligned} A\cdot(B\cdot C) = A\cdot\left(\, B\cdot\vec{c}_1 \ldots B\cdot\vec{c}_\ell\,\right) &= \left(\, A\cdot(B\cdot\vec{c}_1) \;\ldots\; A\cdot(B\cdot\vec{c}_\ell)\,\right) \\ &\overset{\star}{=} \left(\, (A\cdot B)\cdot\vec{c}_1 \;\ldots\; (A\cdot B)\cdot\vec{c}_\ell\,\right) = (A\cdot B)\cdot C \end{aligned}$$

Denn bei $(\star)$ gilt nach Korollar 12 Assoziativität: $A\cdot(B\cdot\vec{x}) = (A\cdot B)\cdot\vec{x}$ gilt für alle $\vec{x}\in\mathbb{R}^k$.

$\square$

Beispiel 13 (Kommutativgesetz gilt nicht)

Für die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $A\cdot B \neq B\cdot A$, denn:

$$A\cdot B = \left(A\cdot\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \quad A\cdot\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B\cdot A = \left(B\cdot\left(\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right) \quad B\cdot\left(\begin{smallmatrix}5\\0\end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Aufgaben

3.4.1 Elementare Rechnungen

Aufgabe 3.1 Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $A + B$, $A - B$, $A^T + B$, $A + B^T$, $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Aufgabe 3.2 Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $a), b)$ und $c)$ und lösen Sie dann $d)$ mit diesen Ergebnissen ohne erneute Rechnungen durchzuführen.

a) $A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $A \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.3 Ein Pizzabäcker will die folgenden Pizzen mit den jeweils angegebenen Zutaten backen:

Pizza	Zutaten
Margherita	Teig, T.soße, Käse
Funghi	Teig, T.soße, Käse, Pilze
Salami	Teig, T.soße, Käse, $\frac{1}{2}$ Packung Salami
Pizza „mit allem“ und doppelt Käse	Teig, T.soße, Käse, 1 Packung Salami, Pilze, 2 Käse

An verschiedenen Stichtagen (Tag 1 und Tag 2) hatten diese Rohzutaten verschiedene Preise:

Zutat	Preis an Tag 1	Preis an Tag 2
Teig	2,00 €	1,50 €
Tomatensauce	1,50 €	1,00 €
Salami	3,00 €	5,00 €
Pilze	1,00 €	2,00 €
Käse	2,50 €	1,00 €

Formulieren Sie für beide Tage die Berechnung der Rohzutaten-Preise der Pizzen als Matrixmultiplikation und führen Sie diese durch.

Aufgabe 3.4 Für reelle Zahlen a, b gilt, dass aus $a \cdot b = 0$ stets $a = 0$ oder $b = 0$ folgt. Man sagt: “die reellen Zahlen sind *nullteilerfrei*”.

Zeigen Sie, dass dies *für Matrizen* im Allgemeinen nicht gilt, indem sie eine $(2, 2)$-Matrix B, die nicht der Nullmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entspricht, mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

finden. Was gilt für die Determinanten von A, B und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? Steht das im Einklang mit ihrer Vermutung bei Aufgabe 3.1 ?

Lösungen: siehe Seite 28.

Anhang A

Lösungen zu den Übungsaufgaben

A.1 Lösungen: Vektoren

Lösungen für Aufgabe 2.1

a) $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 13$ **b)** $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle = 5$ **c)** $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle = 18$

Lösungen für Aufgabe 2.2
Zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann senkrecht zu einander, wenn gilt: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Für die Vektoren $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt: $\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = -y \cdot x + x \cdot y = 0$. Also sind diese zwei Vektoren stets senkrecht zu einander.

Lösungen für Aufgabe 2.3 Es gilt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = -9 + 3 \cdot a_2$$

Damit die beiden Vektoren senkrecht sind muss also gelten: $-9 + 3a_2 = 0$, dies gilt für $a_2 = 3$. Für den Abstand folgt:

$$\left\| \vec{b} - \vec{a} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Lösungen für Aufgabe 2.4
Berechnung des Kreuzproduktes:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 \\ (-3) \cdot 2 - (-1) \cdot (-2) \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Um zu prüfen ob $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ steht, prüfen wir, ob $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0$ gilt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = (-1) \cdot (-1) + (-8) \cdot 2 + (-5) \cdot (-3) = 1 - 16 + 15 = 0$$

Die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{a}$ sind also senkrecht zu einander.
Das selbe für $\langle \vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b}$ ergibt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = (-1) \cdot (2) + (-8) \cdot 1 + (-5) \cdot (-2) = 2 - 8 + 10 = 0$$

Die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b}$ sind also senkrecht zu einander.

A.2 Lösungen: Matrizen

Lösungen zu Aufgabe 3.1: Die Ergebnisse lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\
A - B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \\
A^T + B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \\
A + B^T &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -2 \\ 24 & -10 \end{pmatrix} \\
B \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 3.2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{a)} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ 6 \\ 33 \end{pmatrix} \quad \textbf{b)} \quad A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ -1 \\ 26 \end{pmatrix} \quad \textbf{c)} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{d)} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 39 & 3 \\ 6 & -1 & -1 \\ 33 & 26 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu Aufgabe 3.3:

$$\text{Zutatenmatrix: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Preismatrix: } \begin{pmatrix} 2 & 1,50 \\ 1,50 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 2,50 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Produkt: } \begin{pmatrix} 6 & 3,50 \\ 7 & 5,50 \\ 7,50 & 6 \\ 12,50 & 11,50 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu Aufgabe 3.4:

Ist $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so muss

$$\begin{pmatrix} b_1 + 2b_3 & b_2 + 2b_4 \\ 2b_1 + 4b_3 & 2b_2 + 4b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gelten. Diese vier Bedingungen sind aber eigentlich nur zwei, nämlich $b_1 + 2b_3 = 0$ und $b_2 + 2b_4 = 0$, also nichts anderes als $b_1 = -2b_3$ und $b_2 = -2b_4$. Damit können wir von b_1 und b_3 sowie von b_2 und b_4 jeweils eines beliebig wählen. Eine Möglichkeit wäre $b_1 = -2, b_2 = -2, b_3 = 1, b_4 = 1$ und tatsächlich: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gelten $\det(A) = \det(B) = 0$ und natürlich hat auch die Nullmatrix Determinante 0. Dies passt gut zu $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

z

Literaturverzeichnis

[Kem98] Arnfried Kemnitz, *Mathematik zum studienbeginn*, vieweg, 1998.

[Sch01] W. Scharlau, *Schulwissen mathematik: Ein Überblick*, Vieweg Braunschweig, 2001.

[SGT00] W. Schäfer, K. Georgi, and G. Trippler, *Übungs- und arbeitsbuch für studienanfänger.*, Teubner, Wiesbaden, 2000.

[SS01] W. Schirotzek and S. Scholz, *Starthilfe mathematik*, Teubner, Wiesbaden, 2001.