Humboldt-Universität zu Berlin

Institut für Informatik
Lehrstuhl Algorithmen und Komplexität

Studienarbeit

Eine neue hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises

Mariano Zelke

19. Mai 2004

Betreuer: Dr. Stefan Hougardy

1 Einleitung

Ein *Hamiltonkreis* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der alle Knoten des Graphen enthält, ein solcher Graph wird *hamiltonsch* genannt. Das Problem, zu entscheiden, ob ein Graph einen Hamiltonkreis besitzt ist $\mathcal{NP}$-vollständig [3]. Es ist also davon auszugehen, dass keine Methode existiert, die in polynomieller Zeit für jeden Graphen entscheidet, ob dieser hamiltonsch ist. Hinreichende Bedingungen, die die Existenz eines Hamiltonkreises in einem Graphen unter bestimmten Voraussetzungen zusichern, gewinnen vor diesem Hintergrund an Bedeutung.

Die älteste hinreichende Bedingung für einen Hamiltonkreis in einem Graphen folgt aus einem Resultat von Dirac[2] aus dem Jahr 1952. Nach diesem Ergebnis besitzt jeder 2-fach zusammenhängende Graph einen Kreis der Länge mindestens $\min\{2 \cdot Minimalgrad(G), |V(G)|\}$. Eine entsprechende Wahl des Minimalgrades verspricht so einen Hamiltonkreis:

Satz (Dirac[2], 1952) *Ist G ein Graph mit mindestens drei Knoten und ist $Minimalgrad(G) \geq \frac{n}{2}$, so enthält G einen Hamiltonkreis.*

Eine zweite klassische hinreichende Bedingung für das Auftreten eines Hamiltonkreises in einem Graphen stammt von Ore[4] und spiegelt den Grundgedanken wider, dass eine Vielzahl von Kanten für einen hamiltonschen Graphen spricht:

Satz (Ore[4], 1960) *Ist G ein Graph mit mindestens 3 Knoten und gilt für alle Paare von Knoten $x, y \in V$ mit $x \neq y$, dass $d(x) + d(y) \geq n$, so enthält G einen Hamiltonkreis.*

Die vorliegende Studienarbeit beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen die Forderung von Ore an einen Graphen abgeschwächt und dennoch die Existenzaussage für einen Hamiltonkreis aufrecht erhalten werden kann.

Ohne den Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, sei eine letzte klassische hinreichende Bedingung für das Auftreten eines Hamiltonkreises in einem Graphen genannt. Das Ergebnis von Chvátal und Erdős[1] stellt einen Zusammenhang zwischen Stabilitätszahl α, Knotenzusammenhangszahl κ und der Existenz eines Hamiltonkreises her:

Satz (Chvátal, Erdős[1], 1972) *Ist G ein Graph mit mindestens drei Knoten und gilt $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, dann enthält G einen Hamiltonkreis.*

2 Der Satz

Das Resultat von Ore ist scharf: Auch wenn gilt

$$d(x) + d(y) \geq (1 - \varepsilon)n \tag{1}$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$, reicht diese Bedingung nicht mehr zwangsläufig aus, damit ein Graph G hamiltonsch ist.
Betrachte dazu den bipartiten $K_{(n-1)/2,(n+1)/2}$: Mit steigendem n erfüllt der Graph Bedingung (1) für beliebig kleines $\varepsilon > 0$, dennoch enthält er keinen Hamiltonkreis: Auf jedem Kreis in diesem Graphen wechseln sich Knoten aus beiden Partitionen ab, keine zwei konsekutiven Knoten können aus der gleichen Partiton stammen, da jede Partition eine stabile Menge bildet. Ein Hamiltonkreis in diesem Graphen müsste also abwechselnd Knoten aus beiden Partitionen verbinden und gleichzeitig zwei Knoten mehr aus der einen als aus der anderen Partition enthalten, was einen Widerspruch ergibt.

Es stellt sich damit die Frage, welche Bedingung zusätzlich zu (1) gestellt werden muss, um die Existenz eines Hamiltonkreises im Graphen sicherzustellen. Diese zusätzlichen Bedingungen müssen mindestens Graphen von der Art des $K_{(n-1)/2,(n+1)/2}$ verbieten. Bei diesem Graphen erfüllen zwei Knoten x, y in derselben Partition zwar Bedingung (1), allerdings werden dabei alle Knoten in der anderen Partition doppelt gezählt, einmal als Nachbar von x, einmal als Nachbar von y. Die Vereinigung der Nachbarschaften von x und y ist also relativ klein, sie hat die gleiche Größe wie die Nachbarschaft eines einzelnen Knotens. Also stellen wir eine Bedingung an die Vereinigung der Nachbarschaften von zwei Knoten:

$$|N(x) \cup N(y)| \geq \left(\frac{3}{4} - \delta\right) n \tag{2}$$

wobei $\delta \geq 0$
Doch auch diese zusätzliche Forderung reicht nicht aus: Ein Graph bestehend aus einem K_{n-1} und einem einzelnen Knoten, der über eine Kante mit der Clique der Größe $n - 1$ verbunden ist, erfüllt die Bedingungen (1) und (2), kann aber offensichtlich keinen Hamiltonkreis enthalten.

Der $K_{(n-1)/2,(n+1)/2}$ enthält schon allein aufgrund seiner Zweifärbbarkeit Paare von Knoten, die überhaupt keine gemeinsamen Nachbarn besitzten. Um Graphen vom Stile eines $K_{(n-1)/2,(n+1)/2}$ zu verbieten, kann es daher Sinn machen, eine Bedingung an die gemeinsame Nachbarschaft zweier Knoten zu formulieren:

$$|N(x) \cap N(y)| \geq \left(\frac{1}{4} - \beta\right) n \tag{3}$$

mit $\beta \geq 0$
Allerdings stellt auch diese Forderung zusammen mit Bedingung (1) die Existenz eines Hamiltonkreises nicht sicher. Betrachte dazu den Graphen, der aus dem $K_{(n-1)/2,(n+1)/2}$ entsteht, indem zusätzlich die Partition der Größe $(n - 1)/2$

mit Kanten zu einer Clique ergänzt wird. Dieser Graph erfüllt die Bedingungen (1) und (3), enthält aber keinen Hamiltonkreis.

Ob die Bedingungen (2) und (3) zusammen ohne die Bedingung (1) hinreichend für die Existenz eines Hamiltonkreises sind, ist unbekannt und muss an dieser Stelle offen bleiben.

Wenngleich die Bedingungen (2) und (3) jeweils im Zusammenspiel mit (1) nicht hinreichend für die Existenz eines Hamiltonkreises sind, ist jeder Graph mit genügend großer Knotenanzahl, der alle 3 Bedingungen erfüllt hamiltonsch. Dies wird im Folgenden gezeigt.

Satz
Sei $0 \leq \beta, \delta, \varepsilon < \frac{1}{4}$ *und* $\varepsilon + \delta < \frac{1}{4}$.
Dann existiert ein n_0*, so dass jeder Graph* $G = (V, E)$ *mit* $|V| \geq n_0$*, der die folgenden Bedingungen für alle* $x, y \in V$ *erfüllt, einen Hamiltonkreis enthält.*

i) $d(x) + d(y) \ \geq \ (1 - \varepsilon) \cdot n$

ii) $|N(x) \cup N(y)| \ \geq \ \left(\frac{3}{4} - \delta\right) \cdot n$

iii) $|N(x) \cap N(y)| \ \geq \ \left(\frac{1}{4} - \beta\right) \cdot n$

Beweis
Es wird ein Kreis C in G betrachtet, der nicht alle Knoten enthält und damit kein Hamiltonkreis ist. Die Annahme, C sei ein größtmöglicher Kreis in G, wird in einer Fallunterscheidung für verschiedene Größen von C zum Widerspruch geführt.

Zuerst wird ein Kreis C mit $|C| \geq \left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$ gebildet: Betrachte dazu zwei benachbarte Knoten x, y in G und bilde mit einen Knoten z aus $N(x) \cap N(y)$ ein Dreieck. Dieser Kreis kann nun iterativ vergrößert werden, da je zwei auf dem Kreis konsekutive Knoten a, b nach iii) mindestens $\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$ gemeinsame Nachbarn haben. Solange noch gilt $|C| < \left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$, gibt es unter diesen gemeinsamen Nachbarn von a und b einen Knoten, der nicht im Kreis liegt und über den der Kreis verlängert werden kann.

Wenn C bereits alle Knoten enthält, so ist damit ein Hamiltonkreis von G gefunden. Ansonsten suche nun eine Zusammenhangskomponente S außerhalb von C. Wenn alle Knoten aus C einen Nachbarn in S haben, so kann C mit einen Pfad durch S hindurch erweitert werden. Existiert dagegen ein Knoten $c \in C$, der nicht mit einem Knoten aus S adjazent ist, so betrachte einen beliebigen Knoten $s \in S$ und nach iii) gilt: $|N(c) \cap N(s)| \geq \left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$. Die gemeinsame Nachbarschaft von s und c kann aber nur auf C liegen, damit hat s mindestens

$\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$ Nachbarn auf C. Sind nun zwei konsekutive Knoten auf C mit s benachbart, so kann der Kreis über s erweitert werden.
Diese Erweiterungschritte können fortgesetzt werden, bis in jeder Zusammenhangskomponente S außerhalb von C jeder Knoten $s \in S$ keine zwei konsekutiven Knoten auf C mehr als Nachbarn hat, alle Nachbarn von s auf C also mindestens Abstand zwei auf dem Kreis haben. Da s mindestens $\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$ Nachbarn auf C hat, gilt $|C| \geq 2\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$.

Fall 1:
Betrachte nun den Fall, dass $|C| < 3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$ und es keinen größeren Kreis in G gibt, folglich ist C auch nicht erweiterbar.

Unter dieser Voraussetzung werden zwei Fälle untersucht: Zum Ersten, dass $G \setminus C$ nur Zusammenhangskomponenten der Größe eins enthält, zum Zweiten, dass es eine Zusammenhangskomponente der Größe mindestens zwei in $G \setminus C$ gibt.

Fall 1 A:
Bestehe also $G \setminus C$ lediglich aus Zusammenhangskomponenten der Größe eins, seien S_1 und S_2 zwei solche Zusammenhangskomponenten. Da wegen ii) gilt $|N(S_1) \cup N(S_2)| \geq \frac{n}{2}$, muss es auf C zwei konsekutive Knoten $a, b \in N(S_1) \cup N(S_2)$ geben. Wenn $a, b \in N(S_1)$ oder $a, b \in N(S_2)$, dann kann der Kreis durch den Pfad a, S_1(bzw. S_2)$, b$ erweitert werden. Ansonsten sei o.B.d.A. $a \in N(S_1)$, $b \in N(S_2)$ und betrachte den Kreis als so orientiert, dass a Vorgänger von b ist. Wenn sich auf C an anderer Stelle zwei konsekutive Knoten $a' \in N(S_1)$ und $b' \in N(S_2)$ finden mit b' Nachfolger von a', so lässt sich der Kreis wie in Abbildung 1 verlängern.

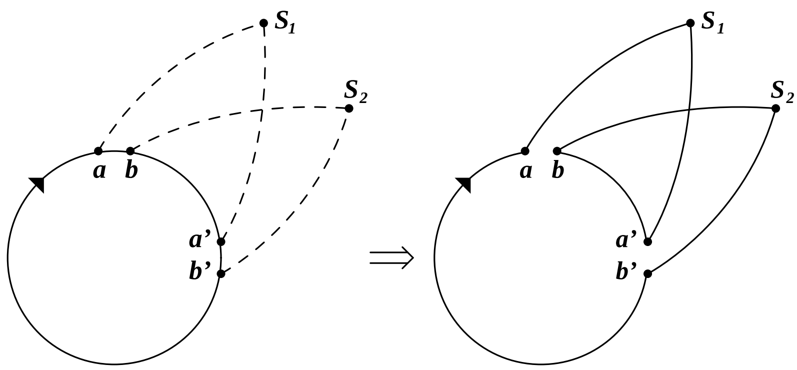

Abbildung 1: Mögliche Kreisverlängerung im Fall 1 A: Findet sich auf dem Kreis zweimal ein Nachbar von S_2 als direkter Nachfolger eines Nachbarn von S_1, so ist der Kreis erweiterbar.

Unter der Annahme, dass C nicht erweiterbar und damit kein solches Knotenpaar a' und b' auf C existiert, verbieten alle restlichen Nachbarn von S_1 außer a ihre Nachfolger auf C als Nachbarn für S_2. Ebenso verbieten alle Knoten aus $N(S_2) \setminus N(S_1)$ ihre Nachfolger als Nachbarn für S_2, da ansonsten zwei konsekutive Knoten auf C mit S_2 benachbart und der Kreis erweiterbar wäre.
Analog dazu verbieten alle restlichen Nachbarn von S_2 außer b und alle Knoten aus $N(S_1) \setminus N(S_2)$ ihre Vorgänger als Nachbarn für S_1.
Bezeichne als V_{S_2} die Menge der für S_2 als Nachbar verbotenen Knoten, V_{S_1} entsprechend. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|V_{S_1}| &= |N(S_2)| + |N(S_1) \setminus N(S_2)| - 1 \quad \text{und} \\
|V_{S_2}| &= |N(S_1)| + |N(S_2) \setminus N(S_1)| - 1
\end{aligned}$$

Offensichtlich muss weiterhin gelten:

$$|C| \geq |V_{S_1}| + |N(S_1)| \quad \text{und} \quad |C| \geq |V_{S_2}| + |N(S_2)|$$

Und damit

$$\begin{aligned}
2|C| &\geq |V_{S_1}| + |N(S_1)| + |V_{S_2}| + |N(S_2)| \\
&= |N(S_2)| + |N(S_1) \setminus N(S_2)| - 1 + |N(S_1)| \\
&\quad + |N(S_1)| + |N(S_2) \setminus N(S_1)| - 1 + |N(S_2)| \\
&= 2\big(|N(S_1)| + |N(S_2)|\big) + |N(S_1) \setminus N(S_2)| + |N(S_2) \setminus N(S_1)| - 2 \\
&= 2\big(2|N(S_1) \cap N(S_2)| + |N(S_1) \setminus N(S_2)| + |N(S_2) \setminus N(S_1)|\big) \\
&\quad + |N(S_1) \setminus N(S_2)| + |N(S_2) \setminus N(S_1)| - 2 \\
&= 2\big(|N(S_1) \cup N(S_2)| + |N(S_1) \cap N(S_2)|\big) \\
&\quad + |N(S_1) \setminus N(S_2)| + |N(S_2) \setminus N(S_1)| - 2 \\
&= 3\big(|N(S_1) \cup N(S_2)|\big) + |N(S_1) \cap N(S_2)| - 2 \\
&\geq 3\left(\left(\frac{3}{4} - \delta\right) n\right) + \left(\frac{1}{4} - \beta\right) n - 2 \\
&= \frac{9n}{4} + \frac{n}{4} - 3\delta n - \beta n - 2 \\
\Rightarrow \quad 2|C| &\geq \frac{9n}{4} + \frac{n}{4} - \frac{3n}{4} - \beta n - 2 \\
\Rightarrow \quad |C| &\geq \frac{7n}{8} - \frac{\beta n}{2} - 1 \\
&= \frac{3n}{4} - \frac{\beta n}{2} - 1 + \frac{n}{8} \\
&\geq \frac{3n}{4} - \frac{\beta n}{2} \qquad \text{für } n \geq 8 \\
\Rightarrow \quad |C| &\geq 3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n
\end{aligned}$$

Damit wurde unter der Voraussetzung, C sei größter Kreis in G und $|C| < 3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$ aus der Annahme, dass $G \setminus C$ lediglich aus Zusammenhangskomponenten der Größe eins besteht, ein Widerspruch abgeleitet.

Fall 1 B:
Betrachte nun unter der gleichbleibenden Voraussetzung C sei größter Kreis in G mit $|C| < 3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$ den verbleibenden Fall, dass eine Zusammenhangskomponente S außerhalb von C existiert mit $|S| \geq 2$.
Wenn alle Knoten aus C einen Nachbarn in S haben, dann kann der Kreis offensichtlich durch S hindurch erweitert werden. Andernfalls existiert ein Knoten c auf C, der keine Nachbarn in S besitzt. Dann gilt für zwei Knoten $v, w \in S$, dass sie jeweils mindestens $(\frac{1}{4} - \beta)n$ viele Nachbarn auf C haben, denn nach iii) haben v und w jeweils so viele Nachbarn mit c gemeinsam, diese müssen alle auf dem Kreis liegen: In S können diese Nachbarn nicht liegen, da c keine Nachbarn dort besitzt. Genauso wenig liegen die Nachbarn von v und w in einer anderen Zusammenhangskomponente außerhalb von C, aufgrund der Definintion einer solchen.
Sei v_C ein Nachbar von v auf C und $v_C^\star$ und $v_C^{\star\star}$ seine beiden direkten Nachfolger auf C. Wenn w mit $v_C^\star$ oder $v_C^{\star\star}$ adjazent ist, so kann aus C ein größerer Kreis konstruiert werden: Ersetze den Pfad $v_C, v_C^\star, v_C^{\star\star}$ auf C durch den Pfad $v_C, v, \ldots, w, v_C^{\star\star}$ über S (siehe Abbildung 2). Auch wenn $v_C^\star$ danach nicht mehr im Kreis enthalten ist, ist aus C ein größerer Kreis entstanden.

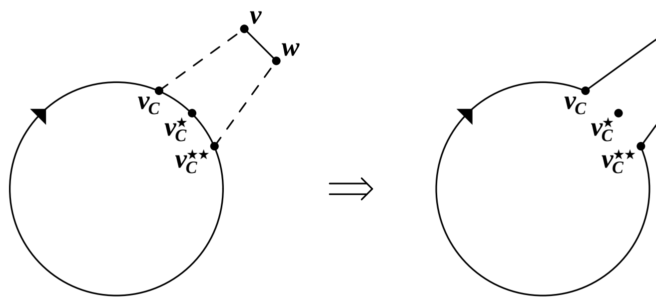

Abbildung 2: Existenz eines größeren Kreises im Fall 1 B: v und w liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente außerhalb des Kreises, v_C ist Nachbar von v auf dem Kreis. Ist einer der beiden direkten Nachfolger von v_C auf dem Kreis mit w verbunden (im Bild $v_C^{\star\star}$), so kann ein größerer Kreis gebildet werden.

Unter der Voraussetzung, dass C nicht mehr zu vergrößern ist, verbietet jeder Nachbar von v auf C seine beiden Nachfolger auf C als Nachbarn für w. Bezeichne die Menge der für w als Nachbarn verbotenen Knoten auf C mit V_w und es gilt:

$$|V_w| \ = \ |N(v) \cap C| \cdot 2 \ \geq \ \left(\frac{1}{4} - \beta\right) n \cdot 2$$

Beachte, dass dabei kein Knoten in V_w doppelt gezählt wurde: Alle Nachbarn von v auf C haben Abstand von mindestens zwei auf C (sonst wäre C trivialerweise erweiterbar), damit wird kein Knoten in V_w von zwei Knoten aus $N(v) \cap C$ verboten. Da C sowohl V_w als auch Nachbarn von w enthält:

$$
\begin{aligned}
|C| &\geq |V_w| + |N(w) \cap C| \\
|C| &\geq 2\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n + \left(\frac{1}{4} - \beta\right) n \;=\; 3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n
\end{aligned}
$$

Damit sind unter der Voraussetzung, dass für C als größtem Kreis in G gilt $|C| < 3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$, beide Fälle, dass $G \setminus C$ nur aus Zusammenhangskomponenten der Größe eins besteht, wie auch dass $G \setminus C$ eine größere Zusammenhangskomponente enthält, zum Widerspruch geführt worden.

Fall 2:
Sei C größter Kreis in G mit $|C| \geq 3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$. Offenbar muss $|C| \leq n - 1$ gelten, sonst ist bereits ein Hamiltonkreis gefunden.
Sei S eine Zusammenhangskomponente außerhalb von C. Bezeichne mit $T := \{N(v) \cap C | v \in S\}$ die Menge der Nachbarn von Knoten in S auf C und mit $T^\star$ die Menge der direkten Nachfolger von Knoten in T auf C. Nenne die Menge der Knoten in G, die nicht in C liegen $\overline{C}$.
Unter der Annahme, dass C größter Kreis in G und damit nicht erweiterbar ist, können nicht alle Knoten in C mit einem Knoten aus S verbunden sein, also $C \setminus T \neq \emptyset$, denn sonst ließe sich C erweitern. Sei $c \in C \setminus T$, $s \in S$. Die gemeinsame Nachbarschaft von c und s muss auf C liegen, damit gilt für n genügend groß:

$$
|T^\star| \;=\; |T| \;\geq\; |N(c) \cap N(s)| \;\geq\; \left(\frac{1}{4} - \beta\right) n \;\geq\; 3
$$

Betrachte die Knoten aus $T^\star$: Diese können nicht mit Knoten in S benachbart sein, da sonst C erweiterbar wäre. Weiterhin dürfen je zwei Knoten in $T^\star$ keinen gemeinsamen Nachbarn außerhalb von C haben, da C sonst wie in Abbildung 3 erweitert werden kann.

Da deshalb kein Knoten außerhalb von C mit zwei Knoten aus $T^\star$ benachbart ist, gilt

$$
\sum_{\star_i \in T^\star} \left(N(\star_i) \cap \overline{C}\right) \;\leq\; |\overline{C}| - |S|
$$

Dann muss es drei Knoten $\star_1, \star_2, \star_3 \in T^\star$ geben mit:

$$
\left|N(\star_1) \cap \overline{C}\right| + \left|N(\star_2) \cap \overline{C}\right| + \left|N(\star_3) \cap \overline{C}\right| \;\leq\; 3\frac{|\overline{C}| - |S|}{|T^\star|} \tag{4}
$$

Anhand von Abbildung 3 wird ebenfalls deutlich, dass die Knoten aus $T^\star$ eine stabile Menge bilden müssen: Sind zwei Knoten aus $T^\star$ verbunden so kann der Kreis verlngert werden (Sind in Abbildung 3 $\star_1$ und $\star_2$ adjazent, so müssen beide dann nicht für die Kreiserweiterung wie dargestellt mit einem Pfad über R verbunden werden sondern können statt dessen ihre gemeinsame Kanten benutzen.).

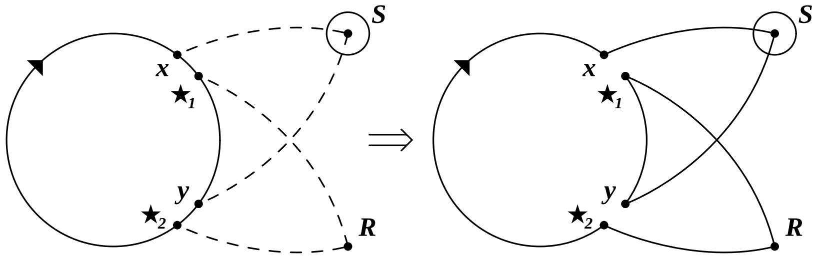

Abbildung 3: Kreiserweiterung: Als Nachbarn der Zusammenhangskomponente S auf dem Kreis sind $x, y \in T$. Wenn zwei Knoten aus $T^\star$, also zwei direkte Nachfolger von Knoten aus T auf dem Kreis (im Bild $\star_1$ und $\star_2$), einen gemeinsamen Nachbarn außerhalb des Kreises haben (im Bild R), so kann der Kreis verlängert werden.

Da nach Voraussetzung C nicht erweiterbar ist, muss gelten: Alle Nachbarn von $\star_1$ oder $\star_2$ auf C (bis auf jeweils den direkten Vorgänger und Nachfolger von $\star_1$ oder $\star_2$) verbieten genau ihren Vorgänger oder Nachfolger als Nachbar für $\star_3$ (siehe Abbildung 4).

Zusätzlich sind $\star_1$ und $\star_2$ als Nachbar für $\star_3$ verboten, da die Knoten in $T^\star$ eine stabile Menge bilden. Weiterhin kann $\star_3$ nicht mit sich selbst benachbart sein. Wenn $V_{\star_3}$ die als Nachbar für $\star_3$ verbotenen Knoten auf C bezeichnet, dann ist also

$$|V_{\star_3}| \;\geq\; \big|\big(N(\star_1) \cup N(\star_2)\big) \cap C\big| - 4 + 3 \tag{5}$$

und da $\star_3$ nicht mit allen Knoten auf C verbunden sein muss, die nicht als Nachbarn verboten sind, ist die Nachbarschaft von $\star_3$ nach oben beschränkt:

$$|N(\star_3)| \;\leq\; |C| - |V_{\star_3}| + |N(\star_3) \cap \overline{C}| \tag{6}$$

Die Nachbarschaft von $\star_1$ und $\star_2$ auf dem Kreis lässt sich darüberhinaus nach Bedingung ii) abschätzen wie folgt:

$$\big|\big(N(\star_1) \cup N(\star_2)\big) \cap C\big| \;\geq\; \left(\frac{3}{4} - \delta\right) n - |N(\star_1) \cap \overline{C}| - |N(\star_2) \cap \overline{C}| \tag{7}$$

Weiterhin gilt nach Bedingung i) für die Gradsumme $d(\star_1) + d(\star_3) \geq (1 - \varepsilon)n$ und zusammen mit (6):

$$d(\star_1) \;\geq\; (1 - \varepsilon)n - |C| + |V_{\star_3}| - |N(\star_3) \cap \overline{C}|$$

Damit kann die Größe der Nachbarschaft von $\star_1$ und $\star_2$ auf C nach unten beschränkt werden:

$$\begin{aligned} |N(\star_1) \cap C| &\;\geq\; (1 - \varepsilon)n - |C| + |V_{\star_3}| - |N(\star_3) \cap C| - |N(\star_1) \cap \overline{C}| \\ |N(\star_2) \cap C| &\;\geq\; (1 - \varepsilon)n - |C| + |V_{\star_3}| - |N(\star_3) \cap C| - |N(\star_2) \cap \overline{C}| \end{aligned} \tag{8}$$

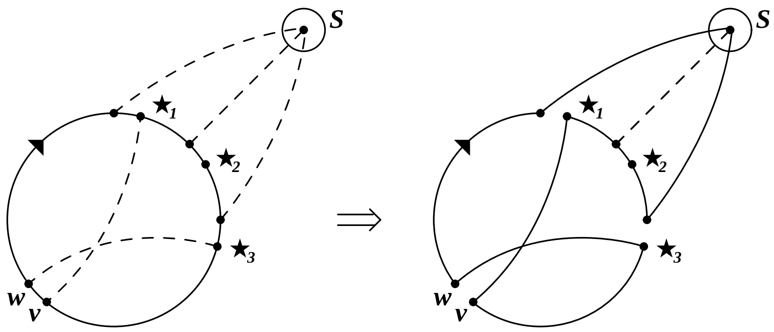

Abbildung 4: Kreiserweiterung: Als direkte Nachfolger von Nachbarn der Zusammenhangskomponente S auf dem Kreis sind $\star_1$, $\star_2$ und $\star_3$ in $T^\star$. Bis auf die direkten Nachfolger und Vorgänger von $\star_1$ und $\star_2$ verbietet jeder weitere Nachbar von $\star_1$ oder $\star_2$ auf dem Kreis (im Bild v als Nachbar von $\star_1$) seinen Vorgänger oder Nachfolger als Nachbar für $\star_3$. Ob der Vorgänger oder der Nachfolger von v als Nachbar von $\star_3$ verboten ist, hängt von der Lage von v ab: Liegt v der Kreisorientierung nach hinter $\star_1$ aber vor $\star_3$, so verbietet v seinen Vorgänger, liegt v wie hier gezeigt hinter $\star_3$, so verbietet v seinen Nachfolger als Nachbarn für $\star_3$. Im Bild ist damit w als Nachbar für $\star_3$ verboten, sonst könnte der Kreis wie gezeigt verlängert werden.

Ein ähnliches Argument wie zur Aufstellung der Ungleichung (5) benutzt wurde, greift nun auch hier. Jeder Nachbar von $\star_1$ auf C (bis auf den direkten Vorgänger und direkten Nachfolger von $\star_1$) verbietet seinen Vorgänger oder Nachfolger als Nachbar für $\star_2$. Zusätzlich ist $\star_1$ und $\star_2$ selbst als Nachbar für $\star_2$ verboten. Andersherum verbieten Nachbarn von $\star_2$ Knoten als Nachbarn für $\star_1$:

$$|V_{\star_2}| \;=\; |N(\star_1) \cap C| - 2 + 2 \qquad \text{und} \qquad |V_{\star_1}| \;=\; |N(\star_2) \cap C|$$

Da C sowohl die Nachbarschaft wie auch die als Nachbarn verbotenen Knoten in der jeweiligen Anzahl enthalten muss:

$$|C| \;\geq\; |N(\star_1) \cap C| + |V_{\star_1}| \qquad \text{und} \qquad |C| \;\geq\; |N(\star_2) \cap C| + |V_{\star_2}|$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} 2|C| &\geq |N(\star_1) \cap C| + |V_{\star_1}| + |N(\star_2) \cap C| + |V_{\star_2}| \\ &= 2|N(\star_1) \cap C| + 2|N(\star_2) \cap C| \\ |C| &\geq |N(\star_1) \cap C| + |N(\star_2) \cap C| \end{aligned}$$

Damit in G der größte Kreis höchstens die Länge $n-1$ hat und somit in G kein Hamiltonkreis existiert muss also gelten:

$$|C| \quad \geq \quad |N(\star_1) \cap C| + |N(\star_2) \cap C|$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(8)}{\geq} && (1-\varepsilon)n - |C| + |V_{\star_3}| - |N(\star_3) \cap \overline{C}| - |N(\star_1) \cap \overline{C}| \\
& && + (1-\varepsilon)n - |C| + |V_{\star_3}| - |N(\star_3) \cap \overline{C}| - |N(\star_2) \cap \overline{C}| \\
&= && 2(1-\varepsilon)n - 2|C| + 2|V_{\star_3}| \\
& && - 2|N(\star_3) \cap \overline{C}| - |N(\star_1) \cap \overline{C}| - |N(\star_2) \cap \overline{C}| \\
&\overset{(5)}{\geq} && 2(1-\varepsilon)n - 2|C| + 2\left(\big|\big(N(\star_1) \cup N(\star_2)\big) \cap C\big| - 1\right) \\
& && - 2|N(\star_3) \cap \overline{C}| - |N(\star_1) \cap \overline{C}| - |N(\star_2) \cap \overline{C}| \\
&\overset{(7)}{\geq} && 2(1-\varepsilon)n - 2|C| + 2\left(\left(\frac{3}{4} - \delta\right) n - |N(\star_1) \cap \overline{C}| - |N(\star_2) \cap \overline{C}| - 1\right) \\
& && - 2|N(\star_3) \cap \overline{C}| - |N(\star_1) \cap \overline{C}| - |N(\star_2) \cap \overline{C}| \\
&= && 2(1-\varepsilon)n - 2|C| + 2\left(\frac{3}{4} - \delta\right) n \\
& && - 2|N(\star_3) \cap \overline{C}| - 3|N(\star_1) \cap \overline{C}| - 3|N(\star_2) \cap \overline{C}| - 2 \\
&\geq && 2(1-\varepsilon)n - 2|C| + 2\left(\frac{3}{4} - \delta\right) n \\
& && - 3\big(|N(\star_3) \cap \overline{C}| + |N(\star_1) \cap \overline{C}| + |N(\star_2) \cap \overline{C}|\big) - 2 \\
&\overset{(4)}{\geq} && 2(1-\varepsilon)n - 2|C| + 2\left(\frac{3}{4} - \delta\right) n - 3\left(3\frac{|\overline{C}| - |S|}{|T^\star|}\right) - 2 \\
3|C| + 2 &\geq && 2(1-\varepsilon)n + 2\left(\frac{3}{4} - \delta\right) n - 3\left(3\frac{|\overline{C}| - |S|}{|T^\star|}\right)
\end{aligned}
$$

Da nach Fallunterscheidung $|C| \geq 3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$ und damit $|\overline{C}| \leq \left(\frac{1}{4} + 3\beta\right) n$ gilt; nach Voraussetzung $|C| \leq n - 1$ und damit $|S| \geq 1$ ist, dazu $|T^\star| \geq \left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$, ergibt sich:

$$
3n - 1 \quad \geq \quad 2(1-\varepsilon)n + 2\left(\frac{3}{4} - \delta\right) n - 9\frac{\left(\frac{1}{4} + 3\beta\right) n - 1}{\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n}
$$

Um die Gültigkeit dieser Ungleichung in Abhängigkeit der Variablen zu betrachten, wird die Ungleichung vereinfacht zu

$$
\begin{aligned}
3n &\geq 2(1-\varepsilon)n + 2\left(\frac{3}{4} - \delta\right) n - \mathcal{O}(1) \\
&= 2n + \frac{3n}{2} - 2\varepsilon n - 2\delta n - \mathcal{O}(1) \\
0 &\geq \frac{n}{2} - 2\varepsilon n - 2\delta n - \mathcal{O}(1) \\
0 &\geq 2n\left(\frac{1}{4} - \varepsilon - \delta\right) - \mathcal{O}(1)
\end{aligned}
$$

Gilt nun $\varepsilon + \delta < \frac{1}{4}$, so existiert ein n_0, so dass die Ungleichung für alle $n \geq n_0$ verletzt ist. Damit aber ist die Annahme, dass C mit $|C| \leq n - 1$ der größte

Kreis in G mit $|V(G)| = n$ ist, zum Widerspruch geführt.

Insgesamt ist also gezeigt worden, dass in einem Graphen G, der genügend groß ist und der die Bedingungen i),ii) und iii) erfüllt, für den größten Kreis C weder gilt $|C| < 3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n$ (Fall 1), noch $3\left(\frac{1}{4} - \beta\right) n \leq |C| \leq n - 1$ (Fall 2). Da sich in G aber wie am Anfang gezeigt, ein Kreis konstruieren lässt, G also nicht kreisfrei ist, muss der größte Kreis in G ein Hamiltonkreis sein.

3 Vergleich mit anderen hinreichenden Bedingungen

Das in dieser Arbeit vorgestellte hinreichende Kriterium für die Existenz eines Hamiltonkreises in einem Graphen stellt auf der einen Seite eine Entschärfung der klassischen Forderung von Ore an einen Graphen dar, da die Gradsumme zweier Knoten geringer sein darf. Auf der anderen Seite allerdings ergibt sich eine Verschärfung dadurch, dass die Nachbarschaft zweier Knoten zwei andere Bedingungen erfüllen muss. Demzufolge gibt es Graphen, welche der Forderung von Ore nicht genügen, wohl aber den Kriterien i), ii) und iii) des vorgestellten Resultates und damit einen Hamiltonkreis enthalten. Andersherum lassen sich Graphen angeben, die den bewiesenen Satz nicht erfüllen, denen aber Ore die Existenz eines Hamiltonkreises zusichert.
Eine Familie von Graphen, auf die der Satz von Ore nicht angewendet werden kann, ist in Abbildung 5 dargestellt. Da $d(x) + d(y) = n - 2 < n$ werden diese Graphen nicht von Ore abgedeckt. Für steigendes n erfüllt diese Graphenfamilie die Bedingungen i), ii) und iii) für beliebig kleine $\varepsilon, \delta, \beta$ und enthält damit einen Hamiltonkreis.

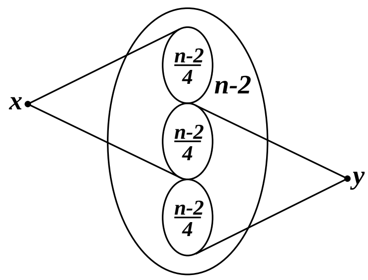

Abbildung 5: Die Menge der $n-2$ Knoten bildet eine Clique. x und y sind mit jeweils $\frac{n-2}{2}$ Knoten dieser Clique verbunden und haben $\frac{n-2}{4}$ dieser Knoten als gemeinsame Nachbarn.

Abbildung 6 gibt einen Graphen an, der nicht unter das hier bewiesene Resultat fällt, da $|N(x) \cap N(y)| = 0$. Allerdings gilt für alle Paare a, b von Knoten

$d(a) + d(b) = n$ und damit verspricht Ore einen Hamiltonkreis in diesem Graphen.

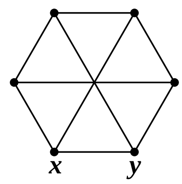

Abbildung 6: Alle Knoten haben $\frac{n}{2}$ Nachbarn, der Schnitt der Nachbarschaften von x und y ist allerding leer.

Die eben genannten Graphen lassen sich auch für den Vergleich des vorliegenden Satzes mit dem von Dirac anführen. Die Graphenfamilie in Abbildung 5 erfüllt nicht die Minimalgradforderung von Dirac, der Knoten x hat lediglich Grad $\frac{n}{2} - 1$. Dagegen haben alle Knoten des in Bild 6 gezeigten Graphen einen Grad von $\frac{n}{2}$ und enthalten nach Dirac einen Hamiltonkreis.

Diese Studienarbeit stellt nicht den einzigen Versuch dar, nach zusätzlichen Voraussetzungen zu suchen, unter denen bestehende hinreichende Bedingungen für das Auftreten eines Hamiltonkreises abgeschwächt werden können. Exemplarisch sei hier ein Ergebnis von M.Löffler und S.Hanke genannt, die eine Entschärfung der Dirac-Bedingung angeben:

Satz(Löffler, Hanke, 2003) *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit mindestens $n = 4$ Knoten und sei $q < \frac{1}{14} - \frac{2}{7n}$. Erfüllt G die Bedingungen*

a) $Minimalgrad(G) \;\geq\; \left(\frac{1}{2} - q\right) \cdot n$

b) $|N(x) \cup N(y)| \;\geq\; \left(\frac{3}{4} - \frac{q}{2}\right) \cdot n \quad \forall x, y \in V$

so ist G hamiltonsch.

Abbildung 7 zeigt eine Familie von Graphen, die für steigendes n die Forderungen von Löffler und Hanke erfüllen und deshalb einen Hamiltonkreis besitzen, eine Aussage, die Dirac nicht zulässt, da $Minimalgrad(G) = \frac{n}{2} - 1$. Aber auch das in dieser Arbeit bewiesene Resultat kann auf diese Graphenklasse nicht angewendet werden, denn der Schnitt der Nachbarschaften von x und y ist leer.
Auf der anderen Seite können Graphen angegeben werden, die nicht unter die Forderungen von Löffler und Hanke fallen, wohl aber durch den hier behandelten Satz die Existenz eines Hamiltonkreises zugesichert bekommen. Betrachte dazu beispielsweise den Graphen, der sich ergibt, wenn ein einzelner Knoten mit $\frac{n}{4}$ Knoten aus einer Clique der Größe $n - 1$ verbunden wird.

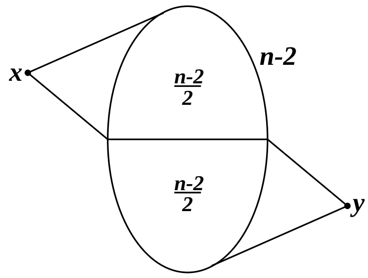

Abbildung 7: Die Menge der $n-2$ Knoten bilden eine Clique, x und y sind jeweils mit $\frac{n-2}{2}$ Knoten davon benachbart, allerdings so, dass der Schnitt der Nachbarschaften von x und y leer ist.

Analog zu den bisher betrachteten hinreichenenden Bedingungen für die Existenz eines Hamiltonkreises lassen sich auch zu dem bereits erwähnten Kriterium von Chvátal und Erdős Graphen angeben, die dieses Kriterium erfüllen, nicht aber die hier vorgestellte Charakterisierung. Genauso existieren Graphen, über die Chvátal und Erdős keine Aussage treffen, die aber mit Hilfe des behandelten Satzes als hamiltonsch gekennzeichnet werden können.
Abbildung 6 zeigt einen Graphen mit $3 = \kappa \geq \alpha = 3$, einen Graphen also, der nach Chvátal und Erdős einen Hamiltonkreis enthält, gleichzeitig aber die Bedingung iii) des in dieser Arbeit behandelten Resultates verletzt, da $|N(x) \cap N(y)| = \emptyset$.
Abbildung 8 dagegen zeigt eine Familie von Graphen, auf die Chvátal und Erdős nicht angewendet werden können: D bildet eine trennende Knotenmenge der Größe $\frac{n}{4} - 1$, A eine stabile Menge mit $|A| = \frac{n}{4}$.

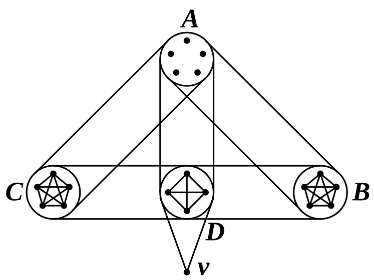

Abbildung 8: A bildet eine stabile Menge, B und C Cliquen, jeweils der Größe $\frac{n}{4}$. D ist eine Clique der Größe $\frac{n}{4} - 1$. A ist vollständig mit B, C und D verbunden, B und C jeweils vollständig mit D. v als einzelner Knoten ist vollständig mit D verbunden.

Der Graph in Abbildung 8 hat folgende Eigenschaften, wobei das Minimum jeweils beispielsweise für das Knotenpaar v, b mit $b \in B$ angenommen wird:

i) $\min\limits_{x,y \in V} \{d(x) + d(y)\} = n - 3$

ii) $\min\limits_{x,y \in V} \{|N(x) \cup N(y)|\} = \frac{3}{4}n - 2$

iii) $\min\limits_{x,y \in V} \{|N(x) \cap N(y)|\} = \frac{n}{4} - 1$

Damit erfüllt der Graph in Abbildung 8 für steigendes n die Bedingungen des hier bewiesenen Ergebnises für beliebig kleine $\varepsilon, \delta, \beta$ und ist hamiltonsch.

Abschließend ist so gezeigt worden, dass die als Gegenstand dieser Studienarbeit behandelte hinreichende Bedingung für das Auftreten eines Hamiltonkreises die betrachteten anderen Kriterien nicht überflüssig macht. Allerdings erlaubt diese Bedingung die Charakterisierung von Graphen als hamiltonsch, über die mit Hilfe der angesprochenen anderen Kriterien keine Aussage möglich ist. In diesem Sinne steht die hier vorgestellte hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises in Graphen gleichberechtigt neben den behandelten früheren Resultaten.

Literatur

[1] V.Chvátal, P.Erdős, *A note on hamiltonian circuits*, Discrete Math. 2 (1972), pp. 111-113.

[2] G.Dirac, *Some theorems on abstract graphs*, Proc. London Math. Soc. 2 (1952) pp. 69-81.

[3] M.R.Garey, D.S.Johnson, *Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H.Freeman and Company, 1979

[4] O.Ore *A note on Hamiltonian Circuits*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), p. 55.